

Strikte Konvexität für Variationsprobleme auf dem n -dimensionalen Torus

Walter Senn

Abstract

We consider a variational problem with an integrand $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ that is \mathbf{Z} -periodic in the first $n + 1$ variables and satisfies certain growth-conditions. By a recent result of Moser, there exist for every $\alpha \in \mathbf{R}^n$ minimal solutions $u : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ minimising $\int F(x, u(x), u_x(x)) dx$ with respect to compactly supported variations of u and such that $\sup |u(x) - \alpha x| < \infty$. Given such a minimal solution u we define the average action $M(\alpha) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol } B_r} \int_{B_r} F(x, u, u_x) dx$ (where B_r is the r -ball around $0 \in \mathbf{R}^n$) and show that $M(\alpha)$ is indeed independent of the minimal solution u satisfying $\sup |u(x) - \alpha x| < \infty$. We prove that this average action $M(\alpha)$ is strictly convex in α .

1 Einleitung

Es ist ein Variationsproblem mit einem in den ersten $n+1$ Variablen periodischen Integranden $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ gegeben. Gesucht sind Funktionen $u : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, die Minimallösungen des Problems, die $\int F(x, u, u_x) dx$ unter allen kompakten Variationen von u minimieren.

Unter geeigneten Wachstumsbedingungen an F gibt es zu jedem $\alpha \in \mathbf{R}^n$ Minimallösungen u mit $\sup |u(x) - \alpha x| < \infty$ (J. Moser, [Mo 1]). Die Menge dieser linear beschränkten Minimallösungen bezeichnen wir mit \mathcal{M}^α . Geometrisch stellt der Graph von $u \in \mathcal{M}^\alpha$ eine Fläche in \mathbf{R}^{n+1} dar, die zwischen zwei parallelen Hyperebenen $x_{n+1} = \alpha x + c$ liegt. Aufgrund der \mathbf{Z}^{n+1} -Periodizität von F lässt sich das Variationsproblem auf dem $(n + 1)$ -dimensionalen Torus betrachten mit Hyperebenen als Lösungen.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass für jedes $\alpha \in \mathbf{R}^n$ die Mittel $M(\alpha)$,

$$M(\alpha) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, u, u_x) dx$$

($u \in \mathcal{M}^\alpha$, B_r Kugel vom Radius r um $0 \in \mathbf{R}^n$, $|B_r|$ ihr Volumen), existieren und unabhängig von $u \in \mathcal{M}^\alpha$ sind. Wir bezeichnen $M(\alpha)$ als (minimale) mittlere Wirkung.

Wie in [Sn] diskutiert wird, sind die Mittel $M(\alpha)$ eine weitere Darstellung der von J. Moser in [Mo 2] erwähnten Funktion $M^0(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M^\varepsilon(\alpha)$. Hierbei stellt $M^\varepsilon(\alpha)$ für $\varepsilon > 0$ das Minimum eines auf $[0, 1]^{n+1}$ definierten, regularisierten Variationsproblems ist. Moser weist die Konvexität von $M^\varepsilon(\alpha)$ und durch Grenzübergang somit von $M^0(\alpha)$ nach. Auf dieses regularisierte Variationsproblem und den Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $M^0(\alpha)$ und $M(\alpha)$ wird in einer weiteren Arbeit eingegangen.

Unser Hauptresultat ist die *strikte* Konvexität von $M(\alpha)$. Für beliebige Minimallösungen $u \in \mathcal{M}^\alpha$, $v \in \mathcal{M}^\beta$ sowie $w \in \mathcal{M}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ ($\alpha \neq \beta \in \mathbf{R}^n$) gilt die echte Ungleichung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, w, w_x) dx < \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \frac{1}{2} [F(x, u, u_x) + F(x, v, v_x)] dx.$$

Die Definition von $M(\alpha)$ erlaubt es, das mittlere Aktionsfunktional als „stabile Norm“ (mit eingeschränktem Definitionsbereich) im Sinne von [Fe] und [Gro] zu interpretieren. Hierbei wird die Funktion $M(\alpha)$ als „Norm“ auf einem Halbraum des Homologie-Vektorraumes $H_n(T^{n+1}, \mathbf{R})$ aufgefasst. Die strikte Konvexität geht über in eine strikte Dreiecksungleichung der entsprechenden „stabilen Norm“. Wir gehen ohne Details kurz auf diesen Zusammenhang ein.

Zuerst wurde die strikte Konvexität im diskreten Modell für $n = 1$ von Mather [Ma] nach einer Idee von Aubry bewiesen. Wie auch Moser [Mo 2], 8e, vermutet, ist jedoch ihr Argument nicht direkt auf den Fall $n > 1$ übertragbar. Der vorliegende Beweis gelingt nun mit einer geometrischen Konstruktion, die anstelle der eher analytischen Moser'schen Funktion $M^0(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} M^\varepsilon(\alpha)$ die Darstellung von $M^0(\alpha)$ als Mittel $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_r|} \int F(x, u, u_x) dx$ ausnutzt. Die Beweisidee geht auf jene von Aubry zurück und erweitert diese.

Die strikte Konvexität von $M(\alpha)$ scheint wesentlich mit der Frage verbunden zu sein, ob sich die Theorie von Aubry und Mather auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt. Man stellt fest, dass für den Fall von Kodimension $\neq 1$, etwa bei Geodätischen auf kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimension > 2 , die entsprechende stabile Norm keineswegs strikt konvex zu sein braucht. Wir verweisen auf das Hedlund-Beispiel in [Ba 2] mit einem zentralsymmetrischen Oktaeder als Normkugel. In diesem Beispiel existieren nur endlich viele minimale Geodätische. Insbesondere treten keine Blätterungen oder Cantor-artige Laminationen der Mannigfaltigkeit

durch Geodätische auf, wie dies für minimale Hyperflächen auf dem $(n + 1)$ -dimensionalen Torus der Fall ist ([Mo 1]).

In der vorliegenden Situation von Flächen der Kodimension 1, in der eine Verallgemeinerung der Aubry-Mather'schen Theorie möglich ist, erweist sich nun die „stabile Norm“ wieder als strikt konvex.

Es sei vermerkt, dass die Funktion $M(\alpha)$ verschiedene physikalische Interpretationen besitzt:

In [Ma] entspricht $M(\alpha)$ der mittleren Wirkung von Teilchen eines Hamilton-Systems mit durchschnittlichem Impuls α . Aus diesem Zusammenhang stammt auch unsere Bezeichnung des mittleren Aktionsfunktional.

Im Modell von Aubry [Au] stellt $M(\alpha)$ die mittlere Energie schwingender Atome in einem 1-dimensionalen Kristall dar. α ist dabei der mittlere Atomabstand im Verhältnis zum Kristallgitter. Zur Verallgemeinerung dieses diskreten Modells auf höhere Dimensionen (stets mit Kodimension 1) vergleiche man ebenso [Bl] mit den dortigen Referenzen.

2 Das Variationsproblem

Das im folgenden dargestellte Variationsproblem stammt von J. Moser, der zugleich die Existenz einer speziellen Klasse von Minimallösungen nachgewiesen hat [Mo 1]. Definitionen und Bezeichnungen sind zum Teil auch aus [Ba 1] übernommen.

Die Koordinaten eines Punktes in \mathbf{R}^{2n+1} seien mit $(x, x_{n+1}, p) = (\bar{x}, p)$ bezeichnet, wo $x \in \mathbf{R}^n$, $x_{n+1} \in \mathbf{R}$ und $p \in \mathbf{R}^n$.

Der Integrand des Variationsproblems ist eine Funktion $F: \mathbf{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $F = F(\bar{x}, p) \in C^{2,\varepsilon}(\mathbf{R}^{n+1}/\mathbf{Z}^{n+1} \times \mathbf{R}^n)$,
d.h. F hat Periode 1 in x_1, \dots, x_{n+1} .
- (ii) Legendre-Bedingung: Es gibt $\gamma \in (0, 1]$ so, dass
$$\gamma |\xi|^2 \leq \sum_{\mu, \nu=1}^n F_{p_\mu p_\nu} \xi_\mu \xi_\nu \leq \gamma^{-1} |\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbf{R}^n.$$
- (iii) Es gibt $c > 0$, so dass
$$|F_{pu}| + |F_{px}| \leq c(1 + |p|)$$

$$|F_{uu}| + |F_{ux}| + |F_{xx}| \leq c(1 + |p|^2)$$

Wegen (i) und (ii) ist F bestimmt nach unten beschränkt. Es lässt sich ohne Einschränkung etwa annehmen, dass $F > 0$. Die Periodizität (i) erlaubt es, von einem Variationsproblem auf dem Torus T^{n+1} zu sprechen. (ii) stellt die übliche Bedingung für die Existenz von Minimallösungen dar. Die Bedingungen (iii) schliesslich werden in die Abschätzungen von Theorem 2.2 eingehen.

Für $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ kompakt und $u \in W_{loc}^{1,2}(\mathbf{R}^n)$, dem Sobolev-Raum mit verallgemeinerten ersten Ableitungen in $L_{loc}^2(\mathbf{R}^n)$, setzen wir

$$I(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u, u_x) dx .$$

$W_{comp}^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ sei der Unterraum aller $\phi \in W_{loc}^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ mit kompakten Träger. Das Integral $\int_{\Omega} F(x, u, u_x)$ soll nun bezüglich kompakten Variationen von u minimiert werden:

Definition Eine Funktion $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ Gebiet, heisst **Minimallösung** des Variationsproblems (kurz: u ist minimal), wenn für alle $\phi \in W_{comp}^{1,2}(\Omega)$

$$I(u + \phi, \text{supp}\phi) \geq I(u, \text{supp}\phi).$$

Die Minimallösungen u erben die Regularität des Integranden F : Falls $F \in C^{2,\epsilon}(\mathbf{R}^{2n+1})$, dann ist auch $u \in C^{2,\epsilon}(\mathbf{R}^n)$. ([Mo 1], Kor. 3.2)

Jede Minimallösung u ist auch **extremal**, d.h. erfüllt die **Eulergleichung**

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} F_{p_{\nu}}(x, u, u_x) dx = F_{x_{n+1}}(x, u, u_x) . \tag{1}$$

Die Eulergleichung lässt sich als elliptische partielle Differentialgleichung für u deuten (vgl. [Mo 1], chapt. 4). Eine Minimallösung u erfüllt deshalb das folgende **Maximumprinzip**:

Lemma 2.1 Seien $u, v \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ minimal im Gebiet $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$. Falls $u \leq v$, ist entweder $u = v$ oder $u < v$.

Nicht jede Extremale ist minimal unter kompakten Variationen. Mithilfe des Maximumprinzips lässt sich jedoch zeigen, dass jede in einem Extremalenfeld eingebettete Extremale minimal ist.

Aufgrund der Periodizität von F sind mit u ebenfalls die Translate $T_{\vec{k}}u(x) \doteq u(x - \vec{k}) + k_{n+1}$, $\vec{k} = (k, k_{n+1}) \in \mathbf{Z}^{n+1}$, Minimallösungen. Die Projektionen der Graphen aller dieser $T_{\vec{k}}u$ auf den Torus $T^{n+1} = \mathbf{R}^{n+1}/\mathbf{Z}^{n+1}$ stimmen überein. Dies führt zur

Definition Die Minimallösung u heisst **selbstschnittfrei** (auf dem Torus T^{n+1}), wenn das T -Orbit von u total geordnet ist, d.h. wenn für alle $\vec{k} \in \mathbf{Z}^{n+1}$ entweder $T_{\vec{k}}u < u$, $T_{\vec{k}}u = u$ oder $T_{\vec{k}}u > u$ gilt.

Eine Minimallösung u heisst (mit α) **linear beschränkt**, wenn $\sup |u(x) - \alpha x| < \infty$ für ein $\alpha \in \mathbf{R}^n$.

Das vorliegende Variationsproblem stellt eine Verallgemeinerung des Problems mit dem Dirichletintegranden $F(p) = \frac{1}{2}|p|^2$ dar. Die Eulergleichung reduziert sich in diesem Falle auf $\Delta u = 0$, so dass die harmonischen Funktionen die Extremalen und wegen der Translationsinvarianz gemäss obiger Bemerkung sogar die Minimalen darstellen. Der Satz von Liouville über harmonische Funktionen besagt dann, dass eine linear beschränkte Minimallösung affin und insbesondere selbstschnittfrei ist. Auch die Umkehrung hiervon ist richtig. Es lässt sich mit Hilfe der Denjoy-Theorie von Kreishomöomorphismen ganz allgemein zeigen, dass eine selbstschnittfreie Minimallösung u stets mit einem gewissen α linear beschränkt sein muss. Motiviert von dieser Theorie heisst α **Rotationsvektor** von u . Für selbstschnittfreie u gilt dann:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \bar{k} > 0 &\implies T_{\bar{k}} u > u \quad \text{bzw.} \quad \bar{\alpha} \bar{k} < 0 \implies T_{\bar{k}} u < u \\ (\bar{\alpha} \doteq (-\alpha, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}), \end{aligned} \tag{2}$$

wogegen jedoch $\bar{\alpha} \bar{k} = 0$ i.a. nicht $T_{\bar{k}} u = u$ impliziert. (Vgl. auch [Ba 1], Lemma 4.1) Grundlegend für die Theorie ist nun die von J.Moser [Mo 1] gezeigte *gleichmässige* lineare Beschränktheit aller Lösungen mit Rotationsvektor aus einem Kompaktum.

Definition Die Menge aller selbstschnittfreien Minimallösungen zum Rotationsvektor $\alpha \in \mathbf{R}^n$ bezeichnen wir mit \mathcal{M}_α . Für $A \subseteq \mathbf{R}^n$ sei $\mathcal{M}_A = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$.

Theorem 2.2 *Zu $A \subset \mathbf{R}^n$ kompakt existieren $K_0, K_1 > 0$, so dass für alle $u \in \mathcal{M}_A$ gilt:*

$$|u(x) - u(0) - \alpha x| \leq K_0 \tag{3}$$

$$|u_x|_{C^\epsilon} \leq K_1, \tag{4}$$

wobei $|\cdot|_{C^\epsilon}$ die Hölder-Norm darstellt. Insbesondere ist $|u_x|$ gleichmässig beschränkt und somit $u \in \mathcal{M}_A$ gleichmässig Lipschitz-stetig. Die Abschätzung (4) folgt mit (i) – (iii) allein aus der gleichmässigen linearen Beschränktheit (3), ohne die Selbstschnittfreiheit zu benützen. (Vgl. den Beweis von Theorem (3.1), [Mo 1])

Unter der C^1 -**Topologie** auf \mathcal{M}_A verstehen wir die Topologie der gleichmässigen Konvergenz von Funktion samt 1. Ableitung auf allen kompakten Teilmengen von \mathbf{R}^n .

Aus dem Theorem beweist man folgenden Kompaktheitssatz:

Korollar 2.3 *Sei $A \subset \mathbf{R}^n$ kompakt. Jede Folge $u_i \in \mathcal{M}_A$, für die $|u_i(0)|$ beschränkt ist, besitzt eine C^1 -konvergente Teilfolge.*

Die Funktion $\alpha = \alpha(u)$ ist zusätzlich stetig in der C^0 - und somit auch in der C^1 -Topologie.

Man überlegt sich leicht, dass die Grenzfunktion wieder minimal und nach dem Maximumprinzip auch selbstschnittfrei ist.

Wir wenden uns der Existenz von selbstschnittfreien Minimallösungen zu.
Für $\alpha \in \mathbf{Q}^n$ setzen wir

$$\mathcal{M}_\alpha^{per} \doteq \{u \text{ Minimallösung} \mid T_{\bar{k}}u = u \text{ für alle } \bar{k} \in \mathbf{Z}^{n+1} \text{ mit } \bar{\alpha}\bar{k} = 0\}.$$

Es lässt sich aus dem Maximumprinzips und der Periodizität schliessen, dass \mathcal{M}_α^{per} total geordnet ist. Insbesondere ist ein periodisches u selbstschnittfrei, sodass $\mathcal{M}_\alpha^{per} \subset \mathcal{M}_\alpha$.

Mit der direkten Methode der Variationsrechnung wird nun gezeigt ([Mo 1], Theorem (5.1)):

Theorem 2.4 Falls $\alpha \in \mathbf{Q}^n$, so ist $\mathcal{M}_\alpha^{per} \neq \emptyset$.

Aus dem Theorem folgert man mit der Kompaktheitseigenschaft (Kor. 2.3) durch Approximation eines beliebigen $\alpha \in \mathbf{R}^n$ mit rationalen α_i sofort, dass auch für dieses α $\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$ sein muss.

3 Die mittlere Wirkung

Wir wollen zeigen, dass für jedes mit α linear beschränkte u der Grenzwert $M(\alpha) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, u, u_x) dx$ existiert und unabhängig vom gewählten u ist, also allein eine Funktion von α darstellt. Dieses gemittelte Variationsintegral $M(\alpha)$ erweist sich als Grenzfunktion einer von J. Moser definierten Funktion $M^\varepsilon(\alpha)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. [Mo 2, chapt. 8] $M^\varepsilon(\alpha)$ stellt dabei das Minimum eines auf $[0, 1]^{n+1}$ definierten Variationsproblems dar. Die Darstellung des genauen Zusammenhangs ist in einer späteren Publikation geplant.

Um sämtliche, mit gleichem α linear beschränkten Minimallösungen miteinander vergleichen zu können, benötigen wir die folgende, leicht verallgemeinerte Konstruktion aus [Ba 1, (6.8)].

Lemma 3.1 Seien $u, v : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ Lipschitz mit L , $|v - u| \leq K$ für ein $K > 0$ und $D \subset \mathbf{R}^n$ konvex. Dann gibt es $w : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ mit

- (a) w ist Lipschitz mit Konstante $2L + 1$
- (b) $w|_{\mathbf{R}^n \setminus D} \equiv u|_{\mathbf{R}^n \setminus D}$
- (c) $w|_{D_K} \equiv v|_{D_K}$ für $D_K \doteq \{x \in D \mid \text{dist}(x, \partial D) \geq K\} \subset D$
- (d) $\text{vol}_n\{x \in D \mid w(x) \neq v(x)\} \leq K \text{vol}_{n-1} \partial D$

Beweis.

Falls $D_K = \emptyset$, so ist das Lemma für $w \equiv u$ erfüllt. Sei also $D_K \neq \emptyset$.

Wir legen $w : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ auf D_K durch $w|_{D_K} \equiv v$ fest. Daraus folgen unmittelbar die Aussagen (c) und (d).

Ausserhalb von D_K soll w wie folgt definiert werden:

Zu jedem $x_0 \in \partial D_K$ und jeder Stützhyperbene an D_K mit Berührungspunkt x_0 und Einheitsnormalenvektor $N \in S^{n-1}$ sei $x_t = x_t(x_0, N) \doteq x_0 + tN$ für $t > 0$. Weiter seien Funktionen $w^\pm : \mathbf{R}^n \setminus D_K \rightarrow \mathbf{R}$ definiert durch $w^\pm(x_t) \doteq v(x_0) \pm (L+1)t$. Die gesuchte Funktion w wird nun ausserhalb von D_K als mittlere der drei Funktionen u, w^+ und w^- festgelegt:

$$w|_{\mathbf{R}^n \setminus D_K} \doteq \max(\min(u, w^+), w^-).$$

Man überprüft leicht, dass für $t \geq |v(x_0) - u(x_0)|$ stets $w^-(x_t) \leq u(x_t) \leq w^+(x_t)$ ist und deshalb wegen $|v(x_0) - u(x_0)| \leq K$ wirklich $w|_{\mathbf{R}^n \setminus D_K} \equiv u|_{\mathbf{R}^n \setminus D_K}$ gilt. Um die Lipschitz-Stetigkeit von w nachzuweisen, überzeugt man sich, dass w^+ und w^- wegen der Konvexität von D_K Lipschitz mit Konstante $L+1$ sind und es somit auch u als mittlere dreier solcher Funktionen sein muss. □

Definition Für $\alpha \in \mathbf{R}^n, K > 0$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\alpha &\doteq \{u \text{ minimal} \mid \sup |u(x) - u(0) - \alpha x| < \infty\} \\ \mathcal{M}^{\alpha, K} &\doteq \{u \in \mathcal{M}^\alpha \mid |u(x) - u(0) - \alpha x| \leq K\} \subseteq \mathcal{M}^\alpha. \end{aligned}$$

Aufgrund von Theorem 2.2 ist $\mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{M}^\alpha$. Es ist zur Zeit eine offene Frage, ob nicht sogar $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}^\alpha$ gilt, d.h. ob nicht aus der linearen Beschränktheit einer Minimallösung ihre Selbstschnittfreiheit folgt.

Wir verwenden für das Weitere die Abkürzung

$$M(u, \Omega) \doteq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega F(x, u, u_x) dx = \frac{1}{|\Omega|} I(u, \Omega)$$

für $u \in W_{loc}^{1,2}(\mathbf{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ messbar und beschränkt und mit $|\Omega| \doteq vol_n \Omega$.

Aus dem obigen geometrischen Lemma lässt sich die im folgenden mehrmals benutzte Aussage herleiten:

Lemma 3.2 Sei $A \subset \mathbf{R}^n$ kompakt, $K > 0$. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass für jedes konvexe $D \subset \mathbf{R}^n$ mit $\frac{vol_{n-1} \partial D}{vol_n D} \leq \delta$ und für alle $u, v \in \mathcal{M}^{\alpha, K}, \alpha \in A$, gilt:

$$|M(u, D) - M(v, D)| \leq \varepsilon,$$

Bemerkung Gemäss Theorem 2.2 kann $K > 0$ so gewählt werden, dass $\mathcal{M}^{\alpha, K} \supseteq \mathcal{M}_\alpha$ für alle $\alpha \in A, A \subset \mathbf{R}^n$ kompakt.

Beweis.

Entsprechend der Bemerkung nach Theorem 2.2 sind alle $u \in \mathcal{M}^{\alpha, K}$, $\alpha \in A$, Lipschitz mit gemeinsamer Konstante $K_1 > 0$.

Es lässt sich deshalb gemäss Lemma 3.1 zu $u, v \in \mathcal{M}^{\alpha, K}$ ein $w : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften (a) – (d) konstruieren.

Wegen $|u_x|, |v_x| \leq K_1$ und der Periodizität von F ist ebenso $F(x, u, u_x)$ und $F(x, v, v_x)$ gleichmässig beschränkt. Aufgrund von (d) gibt es deshalb eine Konstante K_2 unabhängig von D mit

$$|I(w, D) - I(v, D)| \leq K_2 \text{vol}_{n-1} \partial D.$$

Wegen der Minimalität von u gilt zudem

$$I(w, D) - I(u, D) \geq 0.$$

Zusammen ergibt sich

$$I(v, D) - I(u, D) \geq -K_2 \text{vol}_{n-1} \partial D.$$

Vertauschen von u und v vor der Anwendung von Lemma 3.1 liefert die Relation in umgekehrter Richtung und somit

$$|I(v, D) - I(u, D)| \leq K_2 \text{vol}_{n-1} \partial D.$$

Nach Division mit $\text{vol}_n D$ folgt nun für $\delta = \frac{\epsilon}{K_2}$ die Behauptung. □

Für das nächste Lemma benützen wir die vorläufige Bezeichnung

$$M(u) \doteq \liminf_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\varrho|} \int_{B_\varrho} F(x, u, u_x) dx = \liminf_{\varrho \rightarrow \infty} M(u, B_\varrho),$$

wobei $u \in \mathcal{M}^\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbf{R}^n$ und $B_\varrho = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq \varrho\}$ ist.

Lemma 3.3 *Seien $\alpha \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathcal{M}^\alpha$ beliebig. Zu $\epsilon > 0$ gibt es $R > 0$, so dass für alle $\varrho \geq R$ gilt:*

$$|M(u, B_\varrho) - M(u)| \leq \epsilon.$$

Beweis.

Nach Lemma 3.2 gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $r \in \mathbf{N}$ so, dass auf $W \doteq [0, r]^n$ für alle horizontalen Translate $T_{rk}u(x) \doteq u(x - rk)$, $k \in \mathbf{Z}^n$, gilt:

$$|M(T_{rk}u, W) - M(u, W)| \leq \frac{\epsilon}{4}. \tag{5}$$

Wir wollen zeigen, dass $M(u, B_\varrho)$ auf jedem genügend grossen Ball B_ϱ höchstens um $\frac{\epsilon}{2}$ von $M(u, W)$ abweichen kann. Hierzu pflastern wir B_ϱ mit Translaten $T_{rk}W \doteq$

$W - rk$ ($k \in \mathbf{Z}^n$) von W aus.

Für $\varrho \geq r$ sei

$$\hat{B}_\varrho \doteq \bigcup_{k \in J_\varrho} T_{rk}W \quad \text{mit } J_\varrho = \{k \in \mathbf{Z}^n | T_{rk}W \cap B_\varrho \neq \emptyset\}.$$

Die Würfel $T_{rk}W$ überdecken bis auf Ränder \hat{B}_ϱ einfach, so dass

$$M(u, \hat{B}_\varrho) = \frac{1}{|J|} \sum_{k \in J} M(u, T_{rk}W).$$

Da $M(u, \hat{B}_\varrho)$ zwischen dem kleinsten und grössten der Summanden rechterhand liegt, folgt mit $M(u, T_{rk}W) = M(T_{rk}u, W)$ aus (5)

$$|M(u, \hat{B}_\varrho) - M(u, W)| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (6)$$

Andererseits gewinnt man aus der gleichmässigen Beschränktheit $0 \leq F(x, u, u_x) \leq K_3$ (Theorem 2.2 mit anschliessender Bemerkung) die Abschätzung

$$M(u, \hat{B}_\varrho) - K_3 \frac{|\hat{B}_\varrho \setminus B_\varrho|}{|\hat{B}_\varrho|} < M(u, B_\varrho) < M(u, \hat{B}_\varrho) + K_3 \frac{|\hat{B}_\varrho \setminus B_\varrho|}{|\hat{B}_\varrho|} \quad \text{für alle } \varrho > 0. \quad (7)$$

Wegen $B_{\varrho+r\sqrt{n}} \supset \hat{B}_\varrho \supset B_\varrho$ gibt es sicher ein $R \geq r$ mit

$$K_3 \frac{|\hat{B}_\varrho \setminus B_\varrho|}{|\hat{B}_\varrho|} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } \varrho \geq R.$$

Aus(6) und (7) folgt dann für $\varrho \geq R$:

$$|M(u, B_\varrho) - M(u, W)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es muss deshalb auch für $M(u) = \liminf_{\varrho \rightarrow \infty} M(u, B_\varrho)$

$$|M(u) - M(u, W)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gelten, was zusammen $|M(u, B_\varrho) - M(u)| \leq \varepsilon$ ergibt. □

Aus dem Lemma folgt nun unmittelbar, dass für jedes $u \in \mathcal{M}^\alpha$ der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow \infty} M(u, B_r)$ existiert und mit dem Funktional $M(u)$ übereinstimmt. Lemma 3.2 besagt, dass dieses sogar unabhängig vom gewählten $u \in \mathcal{M}^\alpha$ ist und nur vom Rotationsvektors $\alpha \in \mathbf{R}^n$ abhängt.

Es ist somit gezeigt:

Satz 3.4 und Definition Für $\alpha \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathcal{M}^\alpha$ existiert

$$M(\alpha) \doteq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, u, u_x) dx$$

und ist unabhängig von $u \in \mathcal{M}^\alpha$.

Wir bezeichnen die Funktion $M(\alpha) = M(u)$ im Sinne der Hamilton'schen Mechanik als (minimale) **mittlere Wirkung**. Man vergleiche dazu auch den Begriff der *average action* [Ma] im diskreten, eindimensionalen Fall. In dieser begrifflichen Analogie zur Hamilton'schen Mechanik entspricht dem Vektor α ein mittlerer Impuls.

Bemerkung Lemma 3.3 lässt sich mit analogem Beweis leicht verallgemeinern: Gegeben $u \in \mathcal{M}^\alpha$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass für alle kompakten (nicht notwendig konvexen) $D \subset \mathbf{R}^n$ mit $\frac{\text{vol}_{n-1} \partial D}{\text{vol}_n D} \leq \delta$ die Ungleichung $|M(u, D) - M(u)| \leq \varepsilon$ erfüllt ist. Mit obigem Satz folgt:

Für jede Folge kompakter Mengen $D_i \subset \mathbf{R}^n$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}_{n-1} \partial D_i}{\text{vol}_n D_i} = 0$ und für jedes $u \in \mathcal{M}^\alpha$ gilt gleichmässig

$$M(\alpha) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} F(x, u, u_x) dx.$$

Die folgende Aussage wird im Beweis der strikten Konvexität von $M(\alpha)$ verwendet. Man überzeugt sich von ihr leicht mithilfe obiger Bemerkung und durch Gegenannahme.

Folgerung 3.5 Ist $u \in \mathcal{M}^\alpha$ periodisch bezüglich einer Untergruppe $\bar{\Gamma}$ von \mathbf{Z}^{n+1} , d.h. $T_{\bar{k}} u = u$ für $\bar{k} \in \bar{\Gamma}$, und ist $W \subset \mathbf{R}^n$ ein Fundamentalbereich von \mathbf{R}^n / Γ mit $\Gamma = \pi_{n+1}(\bar{\Gamma})$, so gilt

$$M(\alpha) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_r \cap W|} \int_{B_r \cap W} F(x, u, u_x) dx.$$

Ist α insbesondere rational, $u \in \mathcal{M}_\alpha^{\text{per}}$ und $W_\alpha \subset \mathbf{R}^n$ ein Fundamentalbereich von $\mathbf{R}^n / \Gamma_\alpha$ mit $\Gamma_\alpha = \{k \in \mathbf{Z}^n \mid \alpha k \in \mathbf{Z}\}$, so gilt $M(\alpha) = \frac{1}{|W_\alpha|} \int_{W_\alpha} F(x, u, u_x) dx$.

Schliesslich zeigen wir die Stetigkeit von $M(\alpha)$. Wegen jener von $\alpha(u)$ (Kor. 2.3) ist dann auch das Funktional $M(u) = M(\alpha(u))$ stetig.

Lemma 3.6 Die Funktion $M(\alpha)$ ist stetig.

Beweis.

Sei $\alpha^i \in \mathbf{R}^n$ eine gegen $\alpha \in \mathbf{R}^n$ konvergente Folge. Zu jedem α^i wähle man $u^i \in \mathcal{M}_{\alpha^i} (\neq \emptyset)$. Aufgrund des Kompaktheitssatzes und der Stetigkeit von $\alpha(u)$

konvergiert eine Teilfolge u^i gegen ein $u \in \mathcal{M}_\alpha$.

Gemäss Lemma 3.2 und der dortigen Bemerkung konvergieren die entsprechenden Mittel $M(u^i, B_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} M(u^i)$ gleichmässig in i . (D.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbf{N}$, so dass $\forall j \geq j_0 \forall i \in \mathbf{N}$ gilt: $|M(u^i, B_j) - M(u^i)| \leq \varepsilon$.)

Es lassen sich somit die Grenzübergänge in i und j vertauschen, so dass $\lim_{i \rightarrow \infty} M(u^i) = \lim_{j \rightarrow \infty} M(u, B_j) = M(u)$. Nach Satz 3.4 ist aber $M(u^i) = M(\alpha^i)$ und $M(u) = M(\alpha)$, also $\lim M(\alpha^i) = M(\alpha)$. □

4 Hauptresultat

4.1 Strikte Konvexität

J. Moser hat in [Mo 2] die Konvexität der dort definierten Funktion $M^\varepsilon(\alpha)$ nachgewiesen. Da sich zeigen lässt, dass $M^\varepsilon(\alpha)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ in $M(\alpha)$ übergeht (vgl. [Sn]), ist auch $M(\alpha)$ konvex. Der Beweis der *strikten* Konvexität gelingt hingegen mithilfe der Darstellung von $M(\alpha)$ als $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, u, u_x) dx$.

Es ist instruktiv, den Spezialfall eines allein von p abhängigen Integranden $F = F(p)$ zu betrachten. Für ein solches F erfüllen die affinen Funktionen $u(x) = \alpha x + c$ die Eulergleichung (1). Weil jede dieser affinen Lösungen zur extremalen Blätterung $\{(x, \alpha x + c)\}$ gehört, sind sie sogar minimal. Die mittlere Wirkung nimmt für eine solche affine Funktion offensichtlich die Gestalt $M(\alpha) = F(\alpha)$ an. Die linke Ungleichung der Legendre-Bedingung (ii) besagt aber, dass $F(\alpha)$ und somit auch $M(\alpha)$ strikt konvex ist.

Um die Behauptung für beliebiges F mit (i) – (iii) nachzuweisen, zeigen wir im nächsten Kapitel die folgende gleichmässig-strikte Konvexität auf \mathbf{Q}^n :

Theorem 4.1 *Es seien $A, B \subset \mathbf{R}^n$ disjunkt und kompakt. Dann existiert $\varepsilon = \varepsilon(A, B) > 0$, so dass*

$$M\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(M(\alpha) + M(\beta)) - \varepsilon$$

für alle $\alpha \in A \cap \mathbf{Q}^n$, $\beta \in B \cap \mathbf{Q}^n$.

Durch Approximation beliebiger $\alpha \neq \beta \in \mathbf{R}^n$ mit rationalen α_i, β_i folgt mit der Stetigkeit von $M(\alpha)$

$$M\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{1}{2}(M(\alpha) + M(\beta)). \tag{8}$$

Für beliebige Minimallösungen $u \in \mathcal{M}^\alpha, v \in \mathcal{M}^\beta, w \in \mathcal{M}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ und $\alpha \neq \beta$ gilt also

$$\lim \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, w, w_x) dx < \lim \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \frac{1}{2}(F(x, u, u_x) + F(x, v, v_x)) dx.$$

Es ist bekannt, dass Gleichung (8) die strikte Konvexität zur Folge hat:

Korollar 4.2 $M(\alpha)$ ist strikt konvex, d.h. für $\alpha \neq \beta \in \mathbf{R}^n$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt

$$M(\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta) < \lambda M(\alpha) + (1 - \lambda) M(\beta).$$

4.2 Stabile Norm

Es soll kurz auf den Zusammenhang zwischen $M(\alpha)$ und der stabilen Norm im Sinne von [Gro], 4.15-4.19, eingegangen werden.

Hierzu definieren wir $\bar{M}(-\alpha, 1) \doteq M(\alpha)$ und setzen \bar{M} \mathbf{R}^+ -homogen auf $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$ fort, d.h.

$$\bar{M}(\bar{a}) \doteq a_{n+1} \bar{M}\left(\frac{\bar{a}}{a_{n+1}}\right) \quad \text{für } \bar{a} = (a, a_{n+1}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+. \quad (9)$$

Aus der definierten Homogenität ergibt sich mit der Stetigkeit von M auch jene von \bar{M} . Die strikte Konvexität von $M(\alpha)$ übersetzt sich in eine strikte Dreiecksungleichung auf $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$:

Korollar 4.3 Für linear unabhängige $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$ gilt

$$\bar{M}(\bar{a} + \bar{b}) < \bar{M}(\bar{a}) + \bar{M}(\bar{b}).$$

Zum Beweis wird die Funktion \bar{M} gemäss Definition durch M ausgedrückt und Korollar 4.2 angewandt.

\bar{M} besitzt somit auf dem offenen Halbraum die Eigenschaften einer Norm:

$$\begin{aligned} \bar{M}(\bar{a}) &> 0, \bar{a} \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \\ \bar{M}(\lambda\bar{a}) &= \lambda\bar{M}(\bar{a}), \lambda \in \mathbf{R}^+ \\ \bar{M}(\bar{a} + \bar{b}) &< \bar{M}(\bar{a}) + \bar{M}(\bar{b}), \bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \text{ lin. unabh.} \end{aligned}$$

Weiter ist die Konstruktion $\bar{M}((-\alpha, 1)) = \lim_{|B_r|} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, u, u_x) dx$ ($u \in \mathcal{M}^\alpha$) analog zu jener der stabilen Norm, wie sie konkret in [Ba 2], chapt. 2, für Geodätische auf kompakten Mannigfaltigkeiten angegeben wird. Dieser allgemeine Zugang lässt sich auch hier durchführen.

Anstelle der Dichtefunktion eines n -dimensionalen Volumenelements tritt im Falle unseres Variationsproblems der allgemeinere Integrand $F(x, u, u_x)$. Der Graph $(x, u(x))$ einer periodischen Minimallösung stellt einen geschlossenen n -Zykel auf T^{n+1} dar und entspricht deshalb in natürlicher Weise einer Homologieklass aus $H_n(T^{n+1}, \mathbf{Z})$. Integration über den Zykel liefert den Wert der „stabilen Norm“ auf dieser Homologieklass. Durch \mathbf{R}^+ -homogene Fortsetzung analog zu (9) erhält man die „stabile Norm“ auf einem offenen Halbraum des Homologie-Vektorraumes $H_n(T^{n+1}, \mathbf{R})$.

Weitere Ausführungen hierzu finden sich in [Sn].

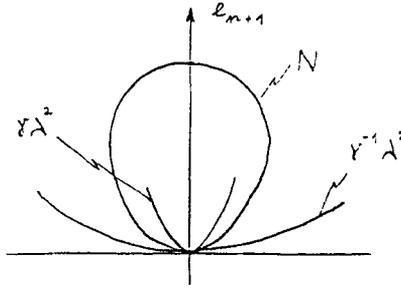


Abbildung 1: Die strikt konvexe Einheitskugel $N = \{\bar{a} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mid \overline{M}(\bar{a}) = 1\}$ liegt geschnitten mit der Ebene E und nahe der Singularität $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ zwischen den Parabeln $\gamma^{-1}\lambda^2 \leq \gamma\lambda^2$.

Bemerkung \overline{M} ist nicht stetig auf den abgeschlossenen Halbraum $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ fortsetzbar.

Einerseits ist wegen der Homogenität von \overline{M} $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \overline{M}((0, \lambda)) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \overline{M}((0, 1)) = 0$.

Andererseits gilt wegen der Abschätzung $\gamma|p|^2 - C \leq F(\bar{x}, p) \leq \gamma^{-1}|p|^2 + C$ ($\gamma \in (0, 1], C > 0$) für $\lambda = |p| \rightarrow 0$ und $|\alpha| = 1$ asymptotisch $\frac{1}{\gamma\lambda} \geq \overline{M}((-\alpha, \lambda)) = \lambda M(\frac{\alpha}{\lambda}) \geq \frac{\gamma}{\lambda}$. Insbesondere ist $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \overline{M}((-\alpha, \lambda)) = \infty$ für alle $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$.

Abbildung 1 stellt einen Schnitt der „Einheitskugel“ $N = \{\bar{a} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mid \overline{M}(\bar{a}) = 1\}$ mit einer beliebigen 2-dimensionalen, die Achse e_{n+1} enthaltenden Ebene $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dar. Nach Korollar 4.3 ist N ein strikt konvexer Körper in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, der jedoch nicht notwendig rotationssymmetrisch um e_{n+1} sein muss. Die obigen Grössenabschätzungen beschreiben das Verhalten von N um 0:

Wegen $\gamma^{-1} \geq \overline{M}((-\lambda\alpha, \lambda^2)) \geq \gamma$ ($\lambda \rightarrow 0, |\alpha| = 1$) liegt $(x, x_{n+1}) \in N \cap E$ in der Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ zwischen zwei Parabeln $\gamma^{-1}\lambda^2 \geq x_{n+1} \geq \gamma\lambda^2$. (Abb. 1)

5 Beweis des Theorems

5.1 Beweisidee

Wir beschränken uns für die Darstellung der Beweisidee auf den Fall $n = 2$.

Zu $\alpha \in A \cap \mathbb{Q}^2, \beta \in B \cap \mathbb{Q}^2$ ($A, B \subset \mathbb{R}^2$ die vorgegebenen Mengen) wählen wir $u \in \mathcal{M}_\alpha^{per}$ und $v \in \mathcal{M}_\beta^{per}$. Wegen $\alpha \neq \beta$ und der linearen Beschränktheit liegt die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid u(x) = v(x)\} \neq \emptyset$ zwischen zwei parallelen Geraden. Zur

Vereinfachung wollen wir annehmen, dass diese Schnittmengen aus einer regulären Kurve g besteht. (Vgl. Abb. 2. Sämtliche Funktionen sind zur Übersichtlichkeit stückweise linear dargestellt.)

Aufgrund ihrer Periodizität besitzen u und v einen gemeinsamen Periodizitätsbereich $W_0 \subset \mathbf{R}^2$, der etwa an die Schnittkurve g grenzt. Wir denken uns den \mathbf{R}^2 mit Translaten von W_0 einfach überdeckt. W_1 sei jenes an W_0 grenzende Translat, das auf der andern Seite von g liegt. Setzen wir $\Omega \doteq W_0 \cup W_1$, so ist mit W_0 und W_1 auch Ω ein Periodizitätsbereich von u und v . Gemäss Folgerung 3.5 gilt dann

$$M(\alpha) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} F(x, u, u_x) dx, \quad M(\beta) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} F(x, v, v_x) dx.$$

Wir definieren nun auf Ω die Funktion \hat{w} durch $\hat{w}|_{W_0} \doteq u|_{W_0}$, $\hat{w}|_{W_1} \doteq v|_{W_1}$ und setzen \hat{w} periodisch zu $\hat{w} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ fort. Da auf diese Weise \hat{w} mit $\frac{\alpha+\beta}{2}$ linear beschränkt ist und - wie wir anschliessend begründen - \hat{w} nicht minimal sein kann, gilt

$$M\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} F(x, \hat{w}, \hat{w}_x) dx.$$

Da W_0 und W_1 Periodizitätsbereiche von u und v sind, gilt

$$\int_{\Omega} F(x, \hat{w}, \hat{w}_x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} F(x, u, u_x) dx + \int_{\Omega} F(x, v, v_x) dx \right),$$

womit $M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{1}{2}(M(\alpha) + M(\beta))$ folgt.

Es kann nun \hat{w} deshalb nicht minimal sein, weil nach der vereinfachenden Annahme einer einzigen Schnittkurve sofort $\hat{w}|_{\Omega} = \max(u|_{\Omega}, v|_{\Omega})$ oder $\hat{w}|_{\Omega} = \min(u|_{\Omega}, v|_{\Omega})$ folgte und so die Minimalität von $\hat{w}|_{\Omega}$ dem Maximumprinzip 2.1 widersprechen würde.

Soweit ist aber noch nicht die gleichmässig-strikte Konvexität auf $A \cap \mathbf{Q}^2$, $B \cap \mathbf{Q}^2$ nachgewiesen:

Da sich $\int_{\Omega} F(x, \hat{w}, \hat{w}_x) dx$ nach dem Maximumprinzip lediglich an der Schnittgeraden g (um einen festen Betrag) verkleinern lässt und der Periodizitätsbereich $\Omega = W_0 \cup W_1$ für $\alpha \in A \cap \mathbf{Q}^2$, $\beta \in B \cap \mathbf{Q}^2$ beliebig gross sein kann, wird die obige Ungleichung $\frac{1}{|\Omega|} I(\hat{w}, \Omega) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|\Omega|} I(u, \Omega) + \frac{1}{|\Omega|} I(v, \Omega) \right)$ nicht gleichmässig-strikt sein. Dies lässt sich vermeiden, indem man die „Treppenfunktion“ \hat{w} statt nur einer beliebig grossen Treppe über dem jeweiligen Periodizitätsbereich Ω durch eine feinere „Treppenfunktion“ w ersetzt, deren Treppenhöhen für alle $\alpha \in A \cap \mathbf{Q}^2$, $\beta \in B \cap \mathbf{Q}^2$ gleichmässig beschränkt sind. Diese aus u und v über dem Periodizitätsbereich Ω konstruierte und wiederum periodisch fortgesetzte Funktion w wird die gleichen obigen Beziehungen wie \hat{w} erfüllen. $I(w, \Omega)$ lässt sich jetzt aber (gleichmässig) an jeder der vielen Treppen und deshalb proportional zu $|\Omega|$ verkleinern, was nach Division mit $|\Omega|$ die gleichmässig-strikte Ungleichung liefert. (Abb. 2)

Die Möglichkeit einer solchen Konstruktion stützt sich auf die gleichmässige lineare Beschränktheit aller $u \in \mathcal{M}_A$, $v \in \mathcal{M}_B$.

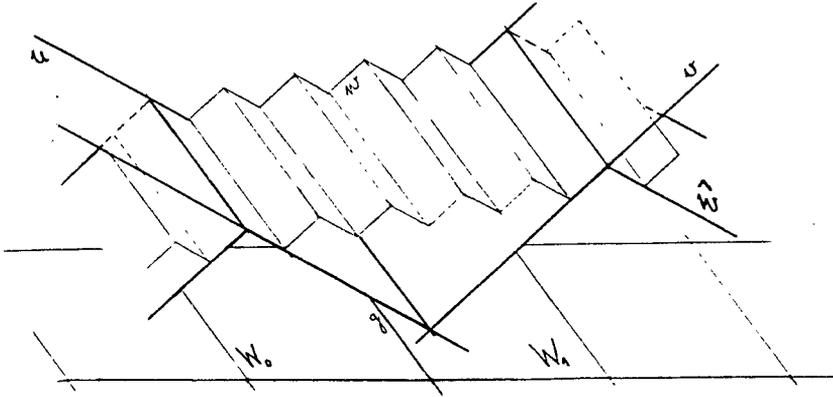


Abbildung 2: Wegen der Periodizität von F lassen sich Teile der Graphen von u und v um ganzzahlige Vektoren verschieben, ohne das Variationsintegral über diese zu verändern. So wird u und v über den Periodizitätsbereichen W_0 bzw. W_1 in gleichmässig beschränkte Streifen zerlegt, zu einer Treppenfunktion zusammengesetzt und periodisch zu w mit gemitteltem Rotationsvektor fortgesetzt. Das Variationsintegral über w lässt sich nun an jeder Kante zweier solcher aneinandergesetzten Streifen verkleinern.

5.2 Gleichmässige Verkleinerung

Als Erstes formulieren wir das Maximumprinzip zu unserem Zwecke um.

Für eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ setzen wir

$$D(u, \Omega) \doteq \sup\{I(u, \Omega) - I(u + \phi, \Omega) \mid \phi \in W_{comp}^{1,2}(\Omega)\} \geq 0.$$

$D(u, \Omega)$ besagt, um wieviel das Integral $\int_{\Omega} F(x, u, u_x) dx$ durch kompakte Variationen von u verkleinert werden kann. Es ist $D(u, \Omega) = 0$ genau dann, wenn $u|_{\Omega}$ minimal ist, sonst $D(u, \Omega) > 0$.

Aus Lemma 2.1 folgt:

Lemma 5.1 Falls $u \neq v \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ minimal im Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sind und $u(x) = v(x)$ für ein $x \in \Omega$, dann ist

$$D(\max(u, v), \Omega) > 0 \text{ und } D(\min(u, v), \Omega) > 0.$$

Die folgende Verschärfung beruht auf der gleichmässigen Beschränktheit von $|u(x) - \alpha x|$ und $|u_x|$ für alle $u \in \mathcal{M}_A = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{M}_{\alpha}$ ($A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt).

Lemma 5.2 Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und disjunkt. Es gibt $r, \delta > 0$ so, dass für alle $u \in \mathcal{M}_A, v \in \mathcal{M}_B$ sowie für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $u(x) = v(x)$ gilt

$$D(\max(u, v), B_r(x)) > \delta \text{ und } D(\min(u, v), B_r(x)) > \delta.$$

Beweis.

Wir führen den Beweis durch Gegenannahme: Es existiere zu jedem $i \in \mathbf{N}$ Funktionen $u_i \in \mathcal{M}_A, v_i \in \mathcal{M}_B$ sowie $x_i \in \mathbf{R}^n$ mit $u_i(x_i) = v_i(x_i)$ und so, dass etwa $D(\max(u_i, v_i), B_i(x_i)) < \frac{1}{i}$.

Man wähle zu $i \in \mathbf{N}$ $k_i = (k_i, k_{i,n+1}) \in \mathbf{Z}^{n+1}$ so, dass $y_i \doteq x_i - k_i \in [0, 1)^n$ und $T_{k_i} u_i(0), T_{k_i} v_i(0)$ beschränkt sind. Ohne Einschränkung kann nach dem Kompaktheitssatz (Korollar 2.3) $\lim T_{k_i} u_i = u_0, \lim T_{k_i} v_i = v_0$ für $u_0 \in \mathcal{M}_A, v_0 \in \mathcal{M}_B$ (insbesondere also $u_0 \neq v_0$) angenommen werden. u_0 und v_0 stimmen in jedem Häufungspunkt von y_i , etwa y_0 , überein. Aufgrund der \mathbf{Z}^{n+1} -Periodizität von F ist dann

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D(\max(T_{k_i} u_i, T_{k_i} v_i), B_i(y_i)) = 0.$$

$\max(T_{k_i} u_i, T_{k_i} v_i)$ ist gemäss Theorem 2.2 Lipschitz-stetig mit gemeinsamer Konstante für alle i . Es ist damit leicht zu zeigen, dass $\max(T_{k_i} u_i, T_{k_i} v_i)$ zusammen mit der 1. Ableitung fast überall gegen $\max(u_0, v_0)$ konvergiert. Mit [Ba 1], Lemma (6.5), vertauscht sich somit der Grenzprozess in obiger Formel zu

$$D(\max(u_0, v_0), B_r(y_0)) = 0, \quad r > 0 \text{ beliebig.}$$

Dies steht wegen $u_0 \neq v_0$ und $u_0(y_0) = v_0(y_0)$ im Widerspruch zu Lemma 5.1. □

5.3 Konstruktion von w

Es seien disjunkte und kompakte Mengen $A, B \subset \mathbf{R}^n$ vorgegeben. r, δ seien die zu A und B gehörenden Konstanten aus Lemma 5.2. Weiter sei K_1 das nach Theorem 2.2 existierende Supremum $\sup \{ |w_x| \mid w \in \mathcal{M}_A \cup \mathcal{M}_B, x \in \mathbf{R}^n \}$. Schliesslich wähle man beliebige $\alpha \in A \cap \mathbf{Q}^n, \beta \in B \cap \mathbf{Q}^n$ sowie $u \in \mathcal{M}_\alpha^{per}, v \in \mathcal{M}_\beta^{per}$.

Für $\gamma \in \mathbf{R}^n$ setzen wir $\bar{L}_\gamma \doteq \{ (x, \gamma x) \mid x \in \mathbf{R}^n \} \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Nach Theorem 2.2 gibt es dann $K_0 = K_0(A, B) > 0$, so dass $\text{graph } u$ und $\text{graph } v$ zwischen zwei zu \bar{L}_α bzw. \bar{L}_β parallelen Hyperebenen mit vertikalem Abstand K_0 liegen.

Wir konstruieren nun $w = u * v$ abwechslungsweise aus vertikalen Translaten von u und v um ein festes $K \in \mathbf{N}$. Die Konstante K sei so gewählt, dass $K \geq K_0 + 2rK_1$ ist. Es sei dann $S_i \doteq \{ x \in \mathbf{R}^n \mid iK \leq v(x) - u(x) \leq (i+1)K \}$. Auf S_i ($i \in \mathbf{Z}$) definieren wir zunächst „Treppenfunktionen“ $\tilde{w} \leq \tilde{w}$, die wir später periodisch zu w mit Rotationsvektor $\frac{\alpha+\beta}{2}$ zusammensetzen. (Abb. 4)

Die Funktionen $\tilde{w}, \tilde{w} \in W_{loc}^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ seien festgelegt durch

$$\begin{aligned} \tilde{w}|_{S_{2i}} &\doteq v - iK, & \tilde{w}|_{S_{2i}} &\doteq u + iK \\ \tilde{w}|_{S_{2i-1}} &\doteq u + iK, & \tilde{w}|_{S_{2i-1}} &\doteq v - iK. \end{aligned}$$

Wie man leicht überprüft, wird damit

$$\begin{aligned} \tilde{w} |_{S_{2i-1} \cup S_{2i}} &= \max\{u + iK, v - iK\}, & \tilde{w} |_{S_{2i} \cup S_{2i+1}} &= \min\{u + (i+1)K, v - iK\} \\ \underline{w} |_{S_{2i-1} \cup S_{2i}} &= \min\{u + iK, v - iK\}, & \underline{w} |_{S_{2i} \cup S_{2i+1}} &= \max\{u + iK, v - (i+1)K\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Wir setzen $T_\nu \doteq S_{\nu-1} \cap S_\nu \subset \mathbf{R}^n$. Aufgrund der Darstellung $T_{2\nu} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x) + \nu K = v(x) - \nu K\}$ wird mit (10)

$$\tilde{w}(T_{2\nu}) = \underline{w}(T_{2\nu}) \text{ für alle } \nu \in \mathbf{Z}.$$

Die Wahl von $K \geq K_0 + 2rK_1$ gewährleistet, dass

$$\text{dist}(T_\nu, T_{\nu+1}) \geq 2r \text{ für alle } \nu \in \mathbf{Z}. \quad (11)$$

Wegen der linearen Beschränktheit von u und v gilt ausserdem:

$$\text{dist}(T_0, \pi_{n+1}(\bar{L}_\alpha \cap \bar{L}_\beta)) \text{ ist beschränkt}. \quad (12)$$

Im folgenden wollen wir zeigen, dass \tilde{w} und \underline{w} periodisch sind und ihre Graphen tatsächlich zwischen zwei zu \bar{L}_γ , $\gamma \doteq \frac{\alpha+\beta}{2}$, parallelen Hyperebenen verlaufen.

Mit $\bar{a} = (a, a_{n+1})$ bzw. $\bar{b} = (b, b_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ bezeichnen wir den Fusspunkt des Lots von $0 \in \mathbf{R}^n$ auf $\bar{L}_\alpha \cap (\bar{L}_\beta - 2K e_{n+1}) = \{(x, \alpha x) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid (\beta - \alpha)x = 2K\}$ bzw. auf $\bar{L}_\beta \cap (\bar{L}_\alpha + 2K e_{n+1}) = \{(x, \beta x) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid (\beta - \alpha)x = 2K\}$ (Abb. 3). Offensichtlich ist $\bar{b} = \bar{a} + 2K e_{n+1}$, also $a = b$ und $b_{n+1} - a_{n+1} = 2K$. Zudem gilt mit

$$\bar{c} = (c, c_{n+1}) \doteq \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} \quad (13)$$

$$\text{die Gleichheit } \langle \bar{c}, \bar{L}_\alpha \cap \bar{L}_\beta \rangle_{\mathbf{R}} = \bar{L}_\gamma. \quad (14)$$

Da zur Bestimmung von \bar{a} und \bar{b} lediglich lineare Gleichungen aufzulösen sind und $\alpha \neq \beta \in \mathbf{Q}^n$, $K \in \mathbf{Z}$ ist, sind \bar{a} und \bar{b} rational. Es gibt deshalb ein kleinstes $\nu_0 \in \mathbf{N}$, so dass $\nu_0 \bar{a}$, $\nu_0 \bar{b} \in \mathbf{Z}^{n+1}$ ist. Weil ausserdem $\bar{a}\bar{\alpha} = 0$ und $\bar{b}\bar{\beta} = 0$ ist, gilt wegen der maximalen Periodizität von u, v

$$T_{\nu_0 \bar{a}} u = u, \quad T_{\nu_0 \bar{b}} v = v.$$

Wir behaupten nun, dass ebenso

$$T_{\nu_0 \bar{c}} \underline{w} = \underline{w}, \quad T_{\nu_0 \bar{c}} \tilde{w} = \tilde{w}.$$

Zum Nachweis benötigt man neben der obigen Periodizität von u und v zusätzlich die Relationen $a = b = c$ und $b_{n+1} - a_{n+1} = 2K$. Man schliesst daraus

$$\begin{aligned} S_\nu - \nu_0 c &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid \nu K \leq v(x + \nu_0 c) - u(x + \nu_0 c) \leq (\nu + 1)K\} = \\ &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid \nu K \leq v(x) - u(x) + 2\nu_0 K \leq (\nu + 1)K\} = S_{\nu - 2\nu_0}. \end{aligned}$$

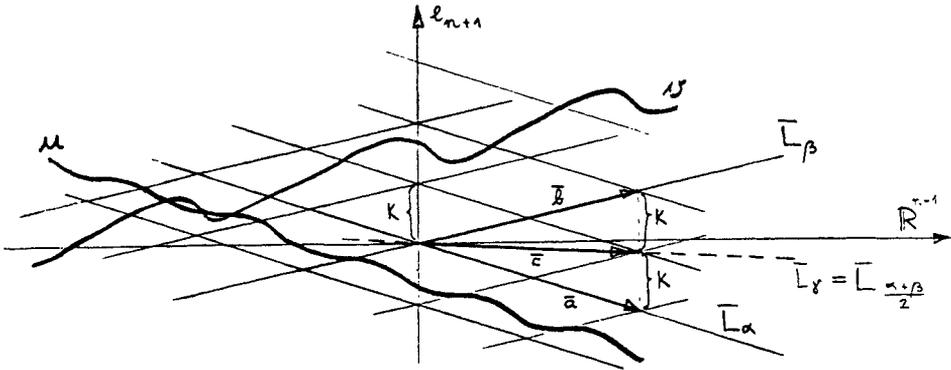


Abbildung 3: Sicht rechtwinklig auf \bar{c} und e_{n+1} . Die Graphen von u und v liegen zwischen vertikalen Translaten um k der Hyperebenen \bar{L}_α bzw. \bar{L}_β . Die Lote \bar{a} und \bar{b} stehen senkrecht auf $\bar{L}_\alpha \cap \bar{L}_\beta$ und es gilt $(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}, \bar{L}_\alpha \cap \bar{L}_\beta)_{\mathbf{R}} = \bar{L}_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Aus den erwähnten Eigenschaften lässt sich etwa für $x \in S_{2i}$ weiter folgern:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x) - \nu_0 c_{n+1} &= v(x) - iK - \nu_0(b_{n+1} - K) = \\ &= v(x - \nu_0 c) - (i - \nu_0)K = \tilde{w}(x - \nu_0 c), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $x - \nu_0 c \in S_{2(i-\nu_0)} \iff x \in S_{2i}$ richtig ist.

Für $x \in S_{2i-1}$ führt man die analoge Rechnung durch und bestätigt so $T_{\nu_0 \bar{c}} \tilde{w} = \tilde{w}$. Aufgrund von (12) und (14) erhalten wir daraus die gewünschte lineare Beschränktheit

$$\sup |\tilde{w}(x) - \gamma x| < \infty.$$

Genauso überprüft man für w die Periodizität und $\sup |w(x) - \gamma x| < \infty$.

Die durch $W_i \doteq S_{i2\nu_0} \cup S_{i2\nu_0+1} \cup \dots \cup S_{(i+1)2\nu_0-1} \subset \mathbf{R}^n$, $i \in \mathbf{Z}$, festgesetzten Mengen sind Periodizitätsbereiche von \tilde{w} und w , denn $W_{i\pm 1} = W_i \pm \nu_0 c$. Wegen $W_{2i-1} \cap W_{2i} = T_{2i\nu_0}$ und $\tilde{w}(T_{2i\nu_0}) = \tilde{w}(T_{2i\nu_0})$ lassen sich \tilde{w} und w folgendermassen zu $w \in W_{loc}^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ zusammensetzen (Abb. 4):

$$w|_{W_{2i}} \doteq \tilde{w}, \quad w|_{W_{2i-1}} \doteq \tilde{w}.$$

Die Funktion w ist wieder periodisch mit $T_{2\nu_0 \bar{c}} w = w$ und Periodizitätsbereich $\Omega \doteq W_0 \cup W_1$.

Aus der Definition von w und der Periodizität von \tilde{w} , \tilde{w} ergibt sich schliesslich $w(x) = u(x) \bmod K \iff w(x \pm \nu_0 c) = v(x) \bmod K$. Hieraus erhält man mit der Periodizität von u, v auf W_i

$$\text{graph}(w|\Omega) \bmod \mathbf{Z}^{n+1} = \text{graph}(u|W_i) \cup \text{graph}(v|W_i) \bmod \mathbf{Z}^{n+1}. \quad (15)$$

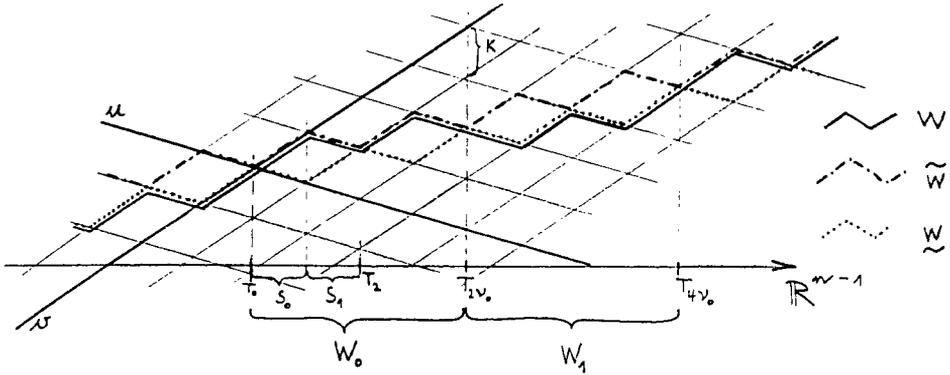


Abbildung 4: Abwechslungsweise Aneinanderfügen der Teile von u und v über den Mengen S_i zu w bzw. \tilde{w} sowie Zusammensetzen von w und \tilde{w} über den Periodizitätsbereichen W_i zu w .

5.4 Abschätzung

Wegen der linearen Beschränktheit von \tilde{w} und \tilde{w} mit γ ist auch $\sup |w(x) - \gamma x|$ beschränkt. $M(\gamma)$ lässt sich deshalb durch das Variationsintegral von w über den Periodizitätsbereich Ω abschätzen. Wir stützen uns dabei auf die Folgerung 3.5, wobei wir die Integrationsbereiche $|B_r \cap E|$ durch $\Omega_i \doteq \{x \in \Omega \mid |x - (x \cdot c)c| \leq ir\}$, c aus (13), ersetzen können. Offensichtlich ist $\Omega_i \subset \Omega_{i+1}$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i = \Omega$. Nach der zitierten Folgerung gilt nun

$$M(\gamma) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{I(w, \Omega_i) - D(w, \Omega_i)}{\text{vol } \Omega_i}. \tag{16}$$

Der Grenzwert für $i \rightarrow \infty$ existiert sicher, da mit u und v auch w in den Richtungen aus \mathbb{R}^n senkrecht zu c periodisch ist. Wir untersuchen die Terme rechter Hand einzeln.

Aus (15) und der Lipschitz-Stetigkeit von u, v leitet man her

$$I(w, \Omega_i) = \frac{1}{2} (I(u, \Omega_i) + I(v, \Omega_i)), \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Sodann lässt sich wegen der Periodizität von u und v auf Ω schreiben

$$M(\alpha) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{I(u, \Omega_i)}{\text{vol } \Omega_i}, \quad M(\beta) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{I(v, \Omega_i)}{\text{vol } \Omega_i}.$$

In (16) eingesetzt wird damit

$$M(\gamma) \leq \frac{1}{2}(M(\alpha) + M(\beta)) - \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{D(w, \Omega_i)}{\text{vol } \Omega_i}. \quad (17)$$

Der Ausdruck $D(w, \Omega_i)$ lässt sich mit Lemma 5.2 gleichmässig nach unten abschätzen:

N_i sei die maximale Zahl von Punkten in $\bigcup_{\nu=1}^{4\nu_0-1} T_\nu \cap \Omega_i$ mit paarweisem Abstand $\geq 2r$. Beachte, dass $T_\nu \subset \Omega$ für $1 \leq i \leq 4\nu_0 - 1$. Wegen (11) ist $N_i \geq (4\nu_0 - 1) i^{n-1} \geq 3\nu_0 i^{n-1}$.

Da nun w (ausser in der Umgebung der $(n-1)$ -dimensionalen Menge $W_i \cap W_{i+1}$) stets eine der beiden Darstellungen (10) besitzt und die anfangs gewählten Konstanten r, δ jenen aus Lemma 5.2 entsprechen, gilt

$$D(w, \Omega_i) \geq N_i \delta \geq 3 \delta \nu_0 i^{n-1}. \quad (18)$$

Als letztes betrachten wir den Term $\text{vol } \Omega_i$.

Die Dichte der Schnittmengen T_ν ($\nu = 1, \dots, \nu_0$) in \mathbf{R}^n ist indirekt proportional zur Länge von c . Um also die in der Übersicht geschilderte Häufigkeit der Schnitt-Tori $\overline{T}_\nu = \text{graph } T_\nu \text{ mod } \mathbf{Z}^{n+1}$ unabhängig von $\alpha \in A \cap \mathbf{Q}^n$ und $\beta \in B \cap \mathbf{Q}^n$ zu erreichen, ist die gleichmässige Beschränktheit von $|c| = |c(\alpha, \beta)|$ zu gewährleisten.

In der Tat gilt:

Es gibt $c_0 \in \mathbf{R}$, so dass $|c| \leq c_0$ für alle $c = c(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^n$ aus (13) mit $\alpha \in A \cap \mathbf{Q}^n, \beta \in B \cap \mathbf{Q}^n$.

Die Schranke c_0 ist wegen $\text{dist}(A, B) > 0$ elementargeometrisch leicht aus der Konstruktion von $c = a = b \in \mathbf{R}^n$ zu bestimmen.

Die Beschränktheit von $|c(\alpha, \beta)|$ lässt nun seinerseits eine Abschätzung von $\text{vol } \Omega_i$ nach oben zu:

$$\text{vol}_n \Omega_i = 2\nu_0 |c| (ir)^{n-1} \omega_{n-1} \leq 2\nu_0 c_0 (ir)^{n-1} \omega_{n-1},$$

wobei ω_{n-1} das Volumen der $(n-1)$ -dimensionalen Kugel vom Radius 1 ist.

Mit dieser und der Abschätzung (18) erhält schliesslich (17) die Gestalt

$$M(\gamma) \leq \frac{1}{2}(M(\alpha) + M(\beta)) - \varepsilon, \quad \varepsilon \doteq \frac{3\delta}{2c_0 r^{n-1} \omega_{n-1}},$$

und ε ist wie gewünscht unabhängig von $\alpha \in A \cap \mathbf{Q}^n, \beta \in B \cap \mathbf{Q}^n$.

Das ist die Behauptung von Theorem 4.1.

Literatur

- [Au] Aubry S., Le Daeron P.Y. : The discret Frenkel-Kontorova model and its extensions I. *Physica 8D* (1983), 381-422
- [Ba 1] Bangert, V. : A uniqueness theorem for \mathbf{Z}^n -periodic variational problems. *Comment. Math. Helv.* 62 (1987), 511-531
- [Ba 2] Bangert, V. : Minimal Geodesics. Erscheint in *Ergodic Th. and Dynam. Syst.*
- [Bl] Blank, M.L. : Metric properties of minimal solutions of discrete periodicale variational problems. *Nonlinearity* 2 (1989), 1-22
- [Fe] Federer H. : Geometric measure theory. Springer Verlag, New York, 1969
- [Gro] Gromov, M. : Structures métriques pour les variétés Riemanniennes. Rédigés par J. Lafontaine et P. Pansu. Paris: CEDIC 1981
- [Ma] Mather, J. : Minimal measures. *Comment. Math. Helv.* 64 (1989), 375-394
- [Mo 1] Moser, J. : Minimal solutions of variational problems on a torus. *Ann. Inst. Henri Poincaré (Analyse non linéaire)* 3 (1986), 229-272
- [Mo 2] Moser, J. : Minimal Foliation on a Torus. In: *Topics in Calculus of Variations* (Montecatini Terme 1987), ed. M. Giaquinta; Springer Lecture Notes in Math. 1365 (1989), 62-99
- [Sn] Senn, W.M. : Strikte Konvexität für \mathbf{Z}^n -periodische Variationsprobleme. Lizentiatsarbeit, Mathematisches Institut der Universität Bern, Dezember 1989

W. Senn
 Mathematisches Institut
 Universität Bern
 Sidlerstrasse 5
 CH-3006 Bern

(Eingegangen am 28. September 1990)