Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)
Vol. 42, July 1991

0044-2275/91/040527-20 \$ 1.50 + 0.20
© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel

Über Mosers regularisiertes Variationsproblem für minimale Blätterungen des n-dimensionalen Torus

Von W. Senn, Mathematisches Institut der Universität Bern, Sidlerstrasse 5, 3006 Bern

1. Einleitung

Wir betrachten ein Variationsproblem auf dem $(n+1)$-dimensionalen Torus $T^{n+1} = \boldsymbol{R}^{n+1}/\boldsymbol{Z}^{n+1}$, dessen Minimallösungen Hyperflächen in T^{n+1} darstellen. Die Minimallösungen lassen sich in der universellen Überlagerung $\boldsymbol{R}^{n+1}$ als Graphen von Funktionen $u: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ auffassen. Eine solche Funktion $u(x)$ minimiert das Variationsintegral

$$\int F(x, u, u_x)\, dx \tag{1}$$

bezüglich kompakten Variationen von u. Um als Variationsproblem auf T^{n+1} definiert zu sein, hat der Integrand $F(x, x_{n+1}, p)$ $\boldsymbol{Z}$-periodisch in den ersten $n+1$ Variablen zu sein.

Unter zusätzlichen Bedingungen an F (wie quadratisches Wachstum in p) lässt sich die Existenz von Minimallösungen u nachweisen, deren Graphen sich projiziert auf T^{n+1} nicht schneiden [Mo 1]. Einem solchen selbstschnittfreien u ist ein Rotationsvektor $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ zugeordnet mit $\sup|u(x) - \alpha x| < \infty$. Falls α etwa rational unabhängig ist, bildet der Abschluss des Graphen von u unter der $\boldsymbol{Z}^{n+1}$-Aktion entweder eine Blätterung von $\boldsymbol{R}^{n+1}$ oder eine Lamination homöomorph zu $\boldsymbol{R}^n \times C$, $C \subset \boldsymbol{R}$ eine Cantormenge.

Die Blätterung oder Lamination ist dabei unabhängig von der gewählten Minimallösung u mit rational unabhängigem Rotationsvektor α [Ba 1]. Sie lässt sich durch eine Funktion $U_\alpha^+ : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ darstellen, die die affine Blätterung $(x, \alpha x + \beta)$, $x \in \boldsymbol{R}^n$, $\beta \in \boldsymbol{R}$, überführt in die Blätterung bzw. Lamination $(x, U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta))$. U_α^+ ist strikt monoton in der letzten Variablen, in dieser jedoch im Falle einer Lamination nur (von oben) halbstetig. Zudem lässt sich $U_\alpha^+(x, \theta) - \theta$ als Funktion auf T^{n+1} auffassen.

Es wird sich herausstellen, dass die so definierte Konjugationsfunktion

U_α^+ für jedes $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ eine Minimallösung des degenerierten Variationsproblems

$$\int_{[0,1]^{n+1}} F(x, U(x, \theta), DU(x, \theta))\, dx\, d\theta \tag{2}$$

ist, wobei $D_\nu = (\partial/\partial x_\nu) + \alpha_\nu(\partial/\partial\theta)$ für $\nu = 1, \ldots, n$ die Ableitung entlang der Hyperebene $(x, \alpha x + \beta)$ darstellt und über sämtliche Funktionen $U(x, \theta) - \theta \in W^{1,2}(T^{n+1})$ minimiert wird.

Wir zeigen weiter, dass das Minimum von (2) mit der minimalen (mittleren) Wirkung $M(\alpha) = \lim_{r\to\infty} (1/|B_r|) \int_{B_r} F(x, u, u_x)\, dx$ aus [Sn] übereinstimmt. B_r ist dabei der Ball vom Radius r um $0 \in \boldsymbol{R}^n$ und u eine beliebige Minimallösung von (1) mit $\sup|u(x) - \alpha x| < \infty$.

Um nun die Eigenschaften dieser explizite aus einem selbstschnittfreien u konstruierten Funktion U_α^+—Eigenschaften wie Blätterung oder Lamination zu sein wie auch die Regularität der einzelnen Blätter—direkt aus dem Variationsansatz (2) herzuleiten, geht J. Moser [Mo 1, 2] über zum regularisierten Variationsproblem

$$\int_{[0,1]^{n+1}} \left(\frac{\varepsilon}{2} U_\theta^2 + F(x, U, DU)\right) dx\, d\theta \tag{3}$$

$$\text{mit } \varepsilon > 0, \quad D_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \text{und } U(x, \theta) - \theta \in W^{1,2}(T^{n+1}).$$

Hier stellt eine Minimallösung $U_\alpha^\varepsilon(x, \theta)$ in jedem Fall eine reguläre (d.h. C^2-) Blätterung von $\boldsymbol{R}^{n+1}$ dar.

Mithilfe von Abschätzungen aus [Mo 2] weisen wir nach, dass für jedes $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ die Minimallösungen U_α^ε für $\varepsilon \to 0$ in fast allen Blättern kompaktgleichmässig gegen die eindeutig bestimmte Funktion $U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta)$ konvergiert. Insbesondere sind die Blätter $u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} U_\alpha^\varepsilon(x, \alpha x + \beta)$ für fast alle $\beta \in \boldsymbol{R}$ reguläre Lösungen des ursprünglichen Variationsproblems (1). Für $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ wird die Konjugationsfunktion U_α^+ also im Sinne des Masses auf eindeutige Weise durch das regularisierte Variationsproblem charakterisiert.

Schliesslich weisen wir nach, dass auch das Minimum $M^\varepsilon(\alpha)$ von (3) für $\varepsilon \to 0$ (komp.-glm. in α) gegen die mittlere Wirkung

$$M(\alpha) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, u, u_x)\, dx$$

konvergiert, wobei u Minimallösung von (1) ist mit $\sup|u(x) - \alpha x| < \infty$.

Die vorliegende Arbeit klärt also die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Zugängen zum Problemkreis "Minimale Lamination und (minimale) mittlere Wirkung". Das wichtigste Einzelergebnis ist die Einordnung der in [Sn] gegebenen Definition der mittleren Wirkung

$$M(\alpha) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, u, u_x)\, dx$$

in die von J. Moser entwickelte Theorie [Mo 1, 2]. Dieser Begriff erlaubt es, die *strikte* Konvexität des Minimums von (2) nachzuweisen, wie sie für das Minimum $M^{\varepsilon}(\alpha)$ des regularisierten Variationsproblems bereits bekannt ist [Mo 2].

Für den Fall diskreter 1-dimensionaler Lösungen stammt das (2) entsprechende degenerierte Variationsproblem von I. C. Percival und wurde von J. Mather untersucht [Ma]. Der Zugang über das regularisierte Variationsproblem zur Funktion U_{α}^{+} wurde im Falle $n = 1$ von J. Denzler diskutiert [Dz].

2. Das Variationsproblem

Es werden die Problemstellung und die grundlegenden Ergebnisse dargelegt, wie sie in [Mo 1, 2] formuliert und nachgewiesen sind.

Der Integrand des Variationsproblems ist eine Funktion $F: \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $(x, x_{n+1}, p) \to F(x, x_{n+1}, p)$ die $\boldsymbol{Z}$-periodisch in den ersten $n+1$ Variabeln ist mit der Regularitätsbedingung

(i) $F = (\bar{x}, p) \in C^{2,\varepsilon}(\boldsymbol{R}^{n+1}/\boldsymbol{Z}^{n+1} \times \boldsymbol{R}^n)$.

Neben der üblichen Legendre-Bedingung

(ii) $\gamma|\xi|^2 \le \sum_{\mu,\nu=1}^{n} F_{p_\mu p_\nu}\xi_\mu\xi_\nu \le \gamma^{-1}|\xi|^2$ für ein $\gamma \in (0,1]$ und alle $\xi \in \boldsymbol{R}^n$

wird zusätzlich das folgende quadratische Wachstum verlangt [Mo 2]: Es gibt c_1, $c_2 > 0$, so dass

(iii) $\gamma|p|^2 \le F(\bar{x}, p) \le \gamma^{-1}|p|^2 + c_1$ und $\sum_{j=1}^{n+1} |F_{x_j}(\bar{x}, p)| \le c_2(|p|^2 + 1)$.

Gesucht sind Funktionen u in $W_{loc}^{1,2}(\boldsymbol{R}^n)$, die das Variationsintegral

$$\int F(x, u, u_x)\, dx \tag{4}$$

unter allen Variationen von u mit kompaktem Träger minimieren. Für alle $\phi \in W_{comp}^{1,2}(\boldsymbol{R}^n)$ soll also gelten

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (F(x, u + \phi, u_x + \phi_x) - F(x, u, u_x))\, dx \ge 0.$$

$u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbf{R}^n)$ heisst dann **Minimallösung** des Variationsproblems oder kurz **minimal**.

Eine Minimallösung u erbt die Regularität des Integranden F: falls F $C^{2,\varepsilon}$ ist, so ist es auch u.

Wegen der Periodizität von F ist mit einer Minimallösung u ebenfalls deren Translat $T_{\bar{k}}u(x) \doteq u(x-k) + k_{n+1}$ um einen ganzzahligen Vektor $\bar{k} = (k, k_{n+1}) \in \mathbf{Z}^{n+1}$ minimal.

Eine Funktion $u \in C^0(\mathbf{R}^n)$ heisst **selbstschnittfrei** (auf T^{n+1}), falls für alle $\bar{k} \in \mathbf{Z}^{n+1}$ entweder $T_{\bar{k}}u > u$, $T_{\bar{k}}u = u$ oder $T_{\bar{k}}u < u$ ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass eine selbstschnittfreie Funktion u **linear beschränkt** sein muss, d.h. dass $\sup|u(x) - \alpha x| < \infty$ für ein $\alpha \in \mathbf{R}^n$ gelten muss. α heisst dann **Rotationsvektor** von u.

Das charakteristische und einfachste Beispiel eines Variationsproblems des dargestellten Typs ist dasjenige mit Dirichlet-Integrand $F(x, x_{n+1}, p) = \frac{1}{2}|p|^2$. Seine Minimalen sind genau die harmonischen Funktionen. Nach der obigen Bemerkung sind selbstschnittfreie Minimallösungen linear beschränkt und nach dem Satz von Liouville ist weiter jede linear beschränkte harmonische Funktion affin. Die affinen Funktionen stellen deshalb genau die selbstschnittfreien Minimallösungen zum Dirichlet-Integranden dar.

Zentral für die gesamte Theorie sind nun Mosers gleichmässige Abschätzungen. Mit $\mathcal{M}_\alpha$ sei die Menge aller selbstschnittfreien Minimallösungen mit Rotationsvektor α bezeichnet und für $A \subset \mathbf{R}$ sei $\mathcal{M}_A \doteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$.

Theorem 2.1. Zu kompaktem $A \subset \mathbf{R}^n$ gibt es $K_0, K_1 > 0$, so dass für alle $u \in \mathcal{M}_A$ gilt:

$$|u(x+y) - u(x) - \alpha y| \leq K_0$$

$$|u_x|_{C^\varepsilon} \leq K_1,$$

wobei $|\cdot|_{C^\varepsilon}$ die Hölder-Norm darstellt.

Ein weiteres wesentliches Hilfsmittel der Theorie ist das **Maximumprinzip**, wonach für zwei Minimallösungen $u \leq v$ stets entweder $u < v$ oder $u = v$ gilt.

Mit ihm und obigem Theorem lässt sich folgende Kompaktheitseigenschaft in der C^1-Topologie herleiten. Unter der **C^1-Topologie** auf $\mathcal{M}_A$ verstehen wir dabei die Topologie der kompakt-gleichmässigen Konvergenz von Funktion und Ableitung.

Korollar 2.2. Sei $A \subset \mathbf{R}^n$ kompakt. Jede Folge $u_i \in \mathcal{M}_A$, für die $|u_i(0)|$ beschränkt ist, besitzt eine C^1-konvergente Teilfolge in $\mathcal{M}_A$.

Die Funktion $\alpha = \alpha(u)$ ist zusätzlich stetig in der C^1-Topologie.

Schliesslich gehen wir auf die Existenz spezieller selbstschnittfreier Minimallösungen ein.

Für rationales α sei $\mathcal{M}_\alpha^{per} \subset \mathcal{M}_\alpha$ die Menge der **periodischen** minimallösungen, d.h. für die $T_{\bar{k}}u = u$ wenn immer $\bar{\alpha}\bar{k} = 0$ mit $\bar{\alpha} \doteq (-\alpha, 1)$ und $\bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}$. Gemäss [Mo 1], Theorem (5.1), ist zunächst $\mathcal{M}_\alpha^{per} \neq \emptyset$. Aufgrund der Kompaktheitseigenschaft Korollar 2.2 gibt es aber für jedes $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ eine gegen $u \in \mathcal{M}_\alpha$ konvergente Folge $u_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}^{per}$ mit $\alpha_i \in \boldsymbol{Q}^n$ und $\alpha_i \to \alpha$. Dies beweist $\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$.

$\mathcal{M}_\alpha$ enthält für beliebiges $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ sogar **maximalperiodische** Minimallösungen u, d.h. solche mit $T_{\bar{k}}u = u$ falls $\bar{\alpha}\bar{k} = 0$ ist. Um dies einzusehen, hat man im obigen Grenzprozess nur die approximierenden $\alpha_i \in \boldsymbol{Q}^n$ so zu wählen, dass für jedes $\bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}$ mit $\bar{\alpha}\bar{k} = 0$ auch $\bar{\alpha}_i\bar{k} = 0$ gilt.

3. Minimale Blätterung

Die selbstschnittfreien Minimallösungen zum Dirichlet-Integranden $F = \frac{1}{2}|p|^2$ sind genau die affinen Funktionen $v_\beta(x) \doteq \alpha x + \beta$. Falls $\alpha \notin \boldsymbol{Q}^n$. liegen die (Graphen der) Translate $T_{\bar{k}}v_\beta$ für $\bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}$ dicht in $\boldsymbol{R}^{n+1}$. Der Abschluss $\overline{\{T_{\bar{k}}v_\beta | \bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}\}}$ bildet dann eine Blätterung von $\boldsymbol{R}^{n+1}$, die für festes $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ unabhängig von v_β, $\beta \in \boldsymbol{R}$, ist. Die Ordnung der Blätter $T_{\bar{k}}v_\beta$ bleibt nun für jedes $u \in \mathcal{M}_\alpha(F)$ zu beliebigem Integranden F erhalten:

$$(\bar{\alpha}\bar{k} > 0 \Leftrightarrow) T_{\bar{k}}v_\beta > v_\beta \Rightarrow T_{\bar{k}}u > u. \tag{5}$$

Dies ist eine Folge der Selbstschnittfreiheit von u, wonach wegen der implizierten α-linearen Beschränktheit für ein $\bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}$ mit $\bar{\alpha}\bar{k} > 0$ nur $T_{\bar{k}}u > u$ sein kann. (Analog für $\bar{\alpha}\bar{k} < 0$.)

Es stellt sich nun die Frage, ob nicht auch für ein solches $u \in \mathcal{M}_\alpha(F)$ mit allgemeinem F die Menge $\overline{\{T_{\bar{k}}u | \bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}\}}$ eine Blätterung von $\boldsymbol{R}^{n+1}$ bildet und unabhängig von $u \in \mathcal{M}_\alpha$ ist. Aus [Ba 2], Kap. 5, ergibt sich, dass $\overline{\{T_{\bar{k}}u | \bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}\}}$ für ein beliebiges $u \in \mathcal{M}_\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$, entweder eine Blätterung oder—bis auf isolierte Blätter—eine Lamination von $\boldsymbol{R}^{n+1}$ darstellt. Wir sprechen dabei von einer **Lamination**, falls $\overline{\{T_{\bar{k}}u(x) | \bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}\}} \subset \boldsymbol{R}$ für jedes $x \in \boldsymbol{R}^n$ eine Cantormenge, d.h. eine perfekte, nirgendsdichte Teilmenge von $\boldsymbol{R}$ ist.

Lamination wie auch Blätterung hängen im allgemeinen Fall jedoch vom gewählten $u \in \mathcal{M}_\alpha$ ab. Wie in [Ba 1] gezeigt wird, sind sie hingegen für maximalperiodische $u \in \mathcal{M}_\alpha$ im folgenden Sinne identisch:

Theorem 3.1 (und Definition). Für ein maximalperiodisches $u \in \mathcal{M}_\alpha$ mit $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ bildet die Menge der Häufungspunkte von $T_{\bar{k}}u$ ($\bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}$)—wir bezeichnen sie mit $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$—entweder eine Blätterung oder eine Lamination von $\boldsymbol{R}^{n+1}$, die unabhängig vom maximalperiodischen $u \in \mathcal{M}_\alpha$ ist.

Um den Anschluss an die Bezeichnungen in [Ba 1] zu gewinnen, sei das erläuternde Lemma angeführt:

Lemma 3.2. Die Minimallösungen $u \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ für $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ sind genau diejenigen aus $\mathcal{M}_\alpha$, für die

$$u = \inf\{T_{\bar{k}}u \mid \bar{\alpha}\bar{k} > 0\} \text{ oder } u = \sup\{T_{\bar{k}}u \mid \bar{\alpha}\bar{k} < 0\}.$$

Im ersten Fall nennen wir u **von oben**, im zweiten **von unten approximierbar.** $u \in \mathcal{M}_\alpha^{rec}$ heisst aufgrund dieser Eigenschaft auch **rekurrent.**

Der Beweis des Lemmas ist einfach und benützt neben der Selbstschnittfreiheit von u die Dichtheit der $\bar{\alpha}\bar{k}$ für $\bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}$ sowie das Maximumprinzip.

Wir wollen nun durch eine Abbildung blattweise die affine Blätterung $\{T_{\bar{k}}v_0 \mid \bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}\}$ mit $v_0(x) = \alpha x$, $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$, in die minimale Blätterung bzw. Lamination $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$ von Theorem 3.1 überführen. Hierzu ordnen wir jedem $T_{\bar{k}}v_0$ das entsprechende Translat $T_{\bar{k}}u$ eines festen, maximalperiodischen $u \in \mathcal{M}_\alpha$ zu. Die maximale Periodizität von u, ausgedrückt in der Form $T_{\bar{k}}v_0 = v_0 \Rightarrow T_{\bar{k}}u = u$, gewährleistet die Eindeutigkeit dieser Zuordnung. Wir setzen

$$U_\alpha(x, \theta) \doteq T_{\bar{k}}u(x) = u(x - k) + k_{n+1}, \text{ falls}$$
$$\theta = T_{\bar{k}}v_0(x) = \alpha(x - k) + k_{n+1}.$$

Das so definierte U_α erfüllt die Periodizitätseigenschaften

$$\begin{aligned} U_\alpha(x + e_\mu, \theta) &= U_\alpha(x, \theta) \\ U_\alpha(x, \theta + 1) &= U_\alpha(x, \theta) + 1, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei für $\mu = 1, \ldots, n$ e_μ der μ-te Einheitsvektor von $\boldsymbol{R}^n$ ist. $U_\alpha(x, .)$ ist für festes $x \in \boldsymbol{R}^n$ und $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ auf einer dichten Teilmenge von $\boldsymbol{R}$ definiert und wegen (5) strikt monoton in θ. Aus U_α lässt sich die eindeutige, in der letzten Variablen (z.B.) von oben halbstetige, strikt monotone Funktion

$$U_\alpha^+(x, \theta) \doteq \lim_{\theta_s \downarrow \theta} U_\alpha(x, \theta_s)$$

bilden, wobei θ_s den Definitionswerten von U_α entspricht. Da nach Theorem 3.1 die Menge der Häufungspunkte von $T_{\bar{k}}u$, $\bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}$, unabhängig vom maximalperiodischen $u \in \mathcal{M}_\alpha$ ist, ist es bis auf Translation um θ_0 auch die aus u konstruierte Funktion $U_\alpha^+(x, \theta)$. Weil aufgrund der Periodizität (6) für alle $\theta_0 \in \boldsymbol{R}$ und für $\bar{Q} \doteq [0, 1]^{n+1}$ gilt

$$\int_{\bar{Q}} U_\alpha^+(x, \theta + \theta_0)\, dx\, d\theta = \int_{\bar{Q}} U_\alpha^+(x, \theta)\, dx\, d\theta + \theta_0,$$

lässt sich U_α^+ etwa so normieren, dass $\int_{\bar{Q}} U_\alpha^+(x, \theta)\, dx\, d\theta = 0$.

Es treten für $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ die beiden Fälle von Theorem 3.1 auf:

A Falls U_α^+ stetig in θ ist, führt U_α^+ die affine Blätterung $(x, \alpha x + \beta)$, in die minimale *Blätterung* $(x, U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta))$ über.

B Falls U_α^+ nicht stetig ist, wird $(x, \alpha x + \beta)$ in die minimale *Lamination* $(x, U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta))$ übergeführt.

Ist $\alpha \in \boldsymbol{Q}^n$, so liegen die Werte $T_{\bar{k}} v_0(x_0) = \alpha(x_0 - k) + k_{n+1}$ für $\bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}$ isoliert in $\boldsymbol{R}$. Für ein $u \in \mathscr{M}_\alpha^{per}$ setzen wir dann $U_\alpha^+(x, T_{\bar{k}} v_0(x)) \doteq T_{\bar{k}} u(x)$, $\bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}$, zu einer in der letzten Variablen von oben halbstetigen Treppenfunktion $U_\alpha^+(x, \theta)$ fort. Diese hängt allerdings vom gewählten $u \in \mathscr{M}_\alpha^{per}$ ab. Zusammenfassend gilt

Theorem 3.3. Für jedes $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ existiert eine (bis auf Translation um θ_0 eindeutige) in θ von oben halbstetige, strikt monotone Funktion $U_\alpha^+(x, \theta)$ mit der Periodizität (6) und so, dass $u(x) = U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta)$ für alle $\beta \in \boldsymbol{R}$ in $\mathscr{M}_\alpha^{rec}$ liegt. Umgekehrt haben alle ausser abzählbar viele $u \in \mathscr{M}_\alpha^{rec}$ diese Darstellung.

Falls α rational ist, existieren (ev. mehrere) in θ von oben halbstetige monotone Treppenfunktionen $U_\alpha^+(x, \theta)$ mit Periodizität (6) und so, dass $U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta) \in \mathscr{M}_\alpha^{per}$ für alle $\beta \in \boldsymbol{R}$.

Die einzigen Unstetigkeitsstellen von U_α^+ mit beliebigem $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ treten entlang der Blätter $(x, \alpha x + \beta_i)$ für abzählbar viele $\beta_i \in \boldsymbol{R}$ auf.

4. Minimale Wirkung

In [Sn] wird die mittlere Wirkung $M(\alpha)$ einer mit α linear beschränkten Minimallösung definiert. Wir zeigen, dass $M(\alpha)$ dem Variationsintegral von U_α^+ über $[0, 1]^{n+1}$ entspricht.

Notation. Die Menge aller mit $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ linear beschränkten Minimallösungen u, für die also $\sup|u(x) - \alpha x| < \infty$ ist, sei mit $\mathscr{M}^\alpha$ bezeichnet. $B_r \subset \boldsymbol{R}^n$ sei der Ball vom Radius r um 0, $|B_r|$ sein Volumen.

Nach Theorem 2.1 ist $\mathscr{M}_\alpha \subset \mathscr{M}^\alpha$. Aus [Sn] übernehmen wir

Satz 4.1 und Definition. Für jedes $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ und jedes mit α linear beschränkte $u \in \mathscr{M}^\alpha$ existiert

$$M(\alpha) \doteq \lim_{r \to \infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, u, u_x)\, dx$$

und ist unabhängig vom gewählten $u \in \mathscr{M}^\alpha$. $M(\alpha)$ wird als **minimale (mittlere) Wirkung** bezeichnet. Falls α rational und $u \in \mathscr{M}^\alpha$ periodisch mit Periodizitätsbereich $E_\alpha \subset \boldsymbol{R}^n$ ist, gilt insbesondere

$$M(\alpha) = \frac{1}{|E_\alpha|} \int_{E_\alpha} F(x, u, u_x)\, dx.$$

Die minimale Wirkung $M(\alpha)$ wird sich als Minimum eines degenerierten Variationsproblems auf T^{n+1} erweisen. In dieser Richtung deutet bereits die Hauptaussage dieses Kapitels:

Satz 4.2. Für die Funktion U_α^+ aus Theorem 3.3, $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ beliebig, gilt

$$M(\alpha) = \int_{\bar{Q}} F(x, U_\alpha^+(x, \theta), DU_\alpha^+(x, \theta))\, dx\, d\theta,$$

wobei $\bar{Q} = [0, 1]^{n+1}$ ist.

Zum Beweis des Satzes wird für $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ die Gleichverteilung von αk mod 1, $k \in \boldsymbol{Z}^n$, benutzt.

Hilfssatz 4.3. Sei $\{k^i\}_{i \in \boldsymbol{N}}$ eine Aufzählung von $\boldsymbol{Z}^n$ mit $|k^i| \leq |k^{i+1}|$ und $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$. Es ist dann $[\alpha k^i] \doteq \alpha k^i$ mod 1 gleichverteilt in $[0, 1]$ (d.h. für jedes Intervall $a \subset [0, 1]$ gilt $\lim_{i \to \infty} (i_a / i) = |a|$, wobei i_a die Anzahl der $j \in \{1, \ldots, i\}$ mit $\alpha k^j \in a$ und $|a|$ die Länge von a ist).

Beweis des Hilfssatzes. Sei etwa die erste Komponente α_1 von α irrational. Wir zeigen zunächst, dass für $L(r) \doteq \{l \in B_r \cap \boldsymbol{Z}^n |\ |l - l_1 e_1| < r - 1\}$ und für ein beliebiges Intervall $a \subset [0, 1]$ gilt

$$\lim_{r \to \infty} \frac{|\{l \in L(r) | [\alpha l] \in a\}|}{|L(r)|} = |a|. \tag{7}$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich $r_0 > 0$, so dass für alle $r \geq r_0$ und alle $l \in L(r)$ mit $l_1 = 0$ gilt

$$\left| \frac{|\{l + ie_1 \in L(r) | i \in \boldsymbol{Z}, [\alpha(l + ie_1)] \in a\}|}{|\{l + ie_1 \in L(r) | i \in \boldsymbol{Z}\}|} - |a| \right| \leq \varepsilon.$$

Dies folgt aus der Gleichverteilung mod 1 von $[\alpha_1 i]$, wobei i die natürlichen Zahlen durchläuft ([We], §1).

Addition der Ungleichung über sämtliche $l \in L(r)$ mit $l_1 = 0$ und anschliessende Mittelung liefert

$$\left| \frac{|\{l \in L(r) | [\alpha l] \in a\}|}{|L(r)|} - |a| \right| \leq \varepsilon$$

und somit (7).

Nun wähle man zum i-ten Folgeglied $k^i \in \boldsymbol{Z}^n$ ein $r^i \in \boldsymbol{N}$ mit $r^i - 1 < |k^i| \leq r^i$. Da für die symmetrische Differenz von $K(i) \doteq \{k^j | 1 \leq j \leq i\}$ und $L(r^i)$ für $i \to \infty$ gilt $|K(i)\, \Delta L(r^i)| / |L(r^i)| \to 0$, folgt aus (7) die Behauptung $\lim_{i \to \infty} |\{k \in K(i) | [\alpha k] \in a\}| / |K(i)| = |a|$. □

Notation. Wir benützen die Abkürzung $I(u, \Omega) = \int_\Omega F(x, u, u_x)\,dx$ für $u \in W^{1,2}_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ und $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$. Ferner sei $u^+ = u^+_\alpha(x, \beta) \doteq U^+_\alpha(x, \alpha x + \beta)$ für beliebiges $\beta \in \boldsymbol{R}$.

Beweis von Satz 4.2. Wir zeigen gertrennt für die Fälle $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ und $\alpha \in \boldsymbol{Q}^n$, dass

$$M(\alpha) = \int_{\bar{Q}} F(x, U^+_\alpha(x, \alpha x + \beta), DU^+_\alpha(x, \alpha x + \beta))\,dx\,d\beta.$$

Wegen $g(x, \beta) \doteq F(x, U^+_\alpha(x, \alpha x + \beta), DU^+_\alpha(x, \alpha x + \beta)) \geq 0$ folgt mit Fubini aus der Existenz des obigen iterierten Integrals die Integrierbarkeit von $g(x, \beta)$ auf $\bar{Q}$. Die Variablentransformation $(x, \beta) \to (x, \theta) = (x, \alpha x + \beta)$ zusammen mit der Periodizität von U^+_α und F in der $n+1$-ten Variablen liefert sodann den Satz.

a) Sei $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$. Die Hilfsfunktion $f\colon [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ sei definiert durch $f(\beta) \doteq I(u^+(\,\cdot\,, \beta), Q)$, wobei $Q = [0, 1]^n$.

Aufgrund der Periodizitäten von U^+_α und F ergibt sich für $k \in \boldsymbol{Z}^n$ die Gleichheit $f([\alpha k]) = I(u^+(\,\cdot\,, 0), k + Q)$. Für die Aufzählung $\{k^i\}_{i \in \boldsymbol{N}}$ aus obigem Hilfssatz gilt deshalb

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} f([\alpha k^j]) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{|B^r|} I(u^+(\,\cdot\,, 0), B_r). \tag{8}$$

Das folgende (gleichwertige) Kriterium für die Gleichverteilung mod 1 ([We], §1) liefert mit (8) obige Behauptung.

Falls $\{\beta^i\}_{i \in \boldsymbol{N}}$ in $[0, 1]$ gleichverteilt ist, so gilt für jede Riemann-integrierbare Funktion f auf $[0, 1]$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} f(\beta^j) = \int_0^1 f(\beta)\,d\beta.$$

Die erste Voraussetzung des Kriteriums ist für $\beta^j = [\alpha k^j]$ gemäss Hilfssatz 4.3 erfüllt. Schliesslich hat unser f nach Theorem 3.3 höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen und ist deshalb als beschränkte Funktion Riemann-integrierbar.

b) Sei $\alpha \in \boldsymbol{Q}^n$ und $\Gamma_\alpha \doteq \{k \in \boldsymbol{Z}^n | \alpha k \in \boldsymbol{Z}\}$. Sicher gibt es einen Fundamentalbereich E von $\boldsymbol{R}^n/\Gamma_\alpha$ derart, dass $E = \bigcup_{k \in K} k + Q$ für eine endliche Menge $K \subset \boldsymbol{Z}^n$. Da die Funktionen $u^+(\,\cdot\,, \beta)$ für jedes $\beta \in \boldsymbol{R}$ minimal und periodisch mit Periodizitätsbereich E sind, gilt nach Satz 4.1

$$M(\alpha) = \frac{1}{|E|} I(u^+(\,\cdot\,, \beta), E). \tag{9}$$

Insbesondere ist $I(u^+(\,\cdot\,, \beta), E)$ unabhängig von $\beta \in \boldsymbol{R}$. Aufgrund der verschiedenen Periodizitäten ist andererseits

$$I(u^+(\,\cdot\,,\beta), E) = \sum_{k\in K} I(u^+(\,\cdot\,,[\beta+\alpha k]), Q).$$

Integration von $I(u^+(\,\cdot\,,\beta), E)$ über $\beta \in [0, 1]$ liefert deshalb

$$I(u^+(\,\cdot\,,\beta), E) = |K| \int_0^1 I(u^+(\,\cdot\,,\beta), Q)\, d\beta.$$

Wegen $|K| = |E|$ folgt mit (9) wieder obige Behauptung. □

5. Regularisiertes Variationsproblem

Wir geben den alternativen, von Moser [Mo 1, 2] stammenden Zugang zur Funktion $U_\alpha^+(x, \theta)$ und damit auch zur minimalen Wirkung $M(\alpha)$ an. Da jedes einzelne Blatt $u(x) = U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta)$ minimal ist, lässt sich fragen, ob nicht die gesamte Blätterung selbst eine Minimale darstellt von

$$\int_{\bar{Q}} F(x, U(x,\theta), DU(x,\theta))\, dx\, d\theta \tag{10}$$

$$\left(D_\nu \doteq \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial \theta},\; U(x,\theta) - \theta \in W^{1,2}(T^{n+1}),\; \bar{Q} = [0, 1]^{n+1}\right)$$

und entsprechend $M(\alpha)$ das Minimum ist. Man beachte, dass

$$D_\nu U(x, \alpha x + \beta) = (\partial/\partial x_\nu) u(x)$$

ist mit $u(x) = U(x, \alpha x + \beta)$. Tatsächlich wird sich die ursprünglich aus den Translaten $T_{\bar{k}} u$ zusammengesetzte Funktion U_α^+ als (irreguläre) Minimallösung dieses erweiterten Variationsproblems erweisen.

Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, dass das neue Variationsproblem mit Integrand $\tilde{F}((x,\theta), U, U_{(x,\theta)})$ die strikte Legendre-Bedingung (ii) verletzt. In der Folge ist weder gewährleistet, dass die Minimallösung tatsächlich eine Blätterung bzw. Lamination darstellt, noch dass die allfälligen Blätter C^2 wären. Man geht deshalb zum regularisierten Problem

$$\int_{\bar{Q}} \left(\frac{\varepsilon}{2} U_\theta^2 + F(x, U, DU)\right) dx\, d\theta$$

$$\text{mit } \varepsilon > 0 \text{ und } U(x,\theta) - \theta \in W^{1,2}(T^{n+1}) \tag{11}$$

über und studiert das Grenzverhalten der Minimallösungen $U_\alpha^\varepsilon(x, \theta)$ für $\varepsilon \to 0$. Für diese gilt ([Mo 2], Prop. 8.3, 8.4).

Theorem 5.1. Für jedes $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ und jedes $\varepsilon > 0$ besitzt (11) bis auf Translation in θ genau eine C^2-Extremale $U_\alpha^\varepsilon(x, \theta)$ mit der Periodizität (6). $U_\alpha^\varepsilon(x, \theta)$ ist ausserdem strikt monoton in θ.

Aus der strikten Monotonie und der Stetigkeit ergibt sich, dass $(x, U_\alpha^\varepsilon(x, \alpha x + \beta))$ eine Blätterung von $\boldsymbol{R}^{n+1}$ bildet. Da mit $U_\alpha^\varepsilon(x, \theta)$ auch $U_\alpha^\varepsilon(x, \theta + \theta_0)$ für alle $\theta_0 \in \boldsymbol{R}$ Extremale ist, liegt U_α^ε innerhalb eines Extremalenfeldes und stellt deshalb sogar eine Minimallösung von (11) dar.

Analog zu [Mo 2], 8c, definieren wir

$$M^\varepsilon(\alpha) \doteq \int_{\bar{Q}} \left(\frac{\varepsilon}{2} (U_\alpha^\varepsilon)_\theta^2 + F(x, U_\alpha^\varepsilon, DU_\alpha^\varepsilon) \right) dx\, d\theta.$$

In den folgenden beiden Abschnitten beschäftigen wir uns damit, die Konvergenz von U_α^ε gegen U_α^+ und sodann diejenige von $M^\varepsilon(\alpha)$ gegen $M(\alpha)$ nachzuweisen.

5.1. Grenzübergang für die minimale Blätterung

Es soll zunächst gezeigt werden, wie man durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ aus $U_\alpha^\varepsilon(x, \theta)$ eine (vorerst nicht eindeutig bestimmte) Funktion $U_\alpha^0(x, \theta)$ gewinnen kann, die die Eigenschaft hat, dass die Funktionen $u(x) = U_\alpha^0(x, \alpha x + \beta)$ Minimallösungen des ursprünglichen Problems (4) sind. Hieraus wird für $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ die Übereinstimmung von U_α^0 mit der Lamination U_α^+ folgen und damit die Existenz und Eindeutigkeit der Grenzfunktion für $\varepsilon \to 0$. Wir weisen schon hier darauf hin, dass zwar die Konvergenz der Funktionen $x \to U_\alpha^\varepsilon(x, \alpha x + \beta)$ für $\varepsilon \to 0$ C^1-kompakt-gleichmässig ist, dass jedoch die Grenzfunktion $\theta \to U_\alpha^0(x, \theta)$ unstetig ist, falls die minimale Lamination zum Vektor α Löcher besitzt.

Nach Prop. 8.5 in [Mo 2] gelten für die Funktion

$$u^\varepsilon = u_\alpha^\varepsilon(x, \beta) \doteq U_\alpha^\varepsilon(x, \alpha x + \beta)$$

die entscheidenden Abschätzungen:

Lemma 5.2. Es gibt eine von $\varepsilon > 0$ unabhängige Konstante $c = c(F, \alpha) > 0$, so dass

$$|u_{x_\nu}^\varepsilon|_{L^\infty} \le c,\ |u_{x_\nu x_\mu}^\varepsilon|_{L^\infty} \le c,\ (1 \le \nu, \mu \le n) \quad \text{und} \quad \sqrt{\varepsilon}|u_\beta^\varepsilon|_{L^\infty} \le c.$$

Man überprüft unschwer die entsprechenden Periodizitätseigenschaften von u^ε:

$$u^\varepsilon(x + k, \beta) = u^\varepsilon(x, \beta + \alpha k) \quad (k \in \boldsymbol{Z}^n)$$
$$u^\varepsilon(x, \beta + l) = u^\varepsilon(x, \beta) + l \quad (l \in \boldsymbol{Z})$$

Wieder seien die Funktionen $u^\varepsilon(x, \beta)$ so normiert, dass

$$\int_{\bar{Q}} u^\varepsilon(x, \beta)\, dx\, d\beta = 0$$

ist. Dies bedeutet insbesondere, dass für festes α ein $c > 0$ existiert mit $|u^\varepsilon(x, \beta)| \le c$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle $(x, \beta) \in \bar{Q}$.

Die folgenden drei Lemmas sind analog zu [Dz], Theorem 5.2, 5.3 und 5.5 im eindimensionalen Fall. Wir gehen deshalb nur kurz auf ihre Beweise ein. Eine zusätzliche Idee wird nötig sein, um die verschiedenen möglichen Periodizitäten von $u(x) = U^0_\alpha(x, \alpha x + \beta)$ für ein α mit rational abhängigem Rotationsvektor zu berücksichtigen (Satz 5.6).

Lemma 5.3. Sei $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$. Es gibt eine Nullfolge $\{\varepsilon_m\}_{m \in \boldsymbol{N}}$, so dass für alle ausser abzählbar vielen $\beta \in \boldsymbol{R}$ die Funktionen $u^{\varepsilon_m}_\alpha(\,\cdot\,, \beta)$ gegen ein $u^0_\alpha(\,\cdot\,, \beta)$ C^1-konvergieren. u^0_α ist für diese β differenzierbar in x mit $|(u^0_\alpha)_{x_\nu}(x, \beta)|_{L^\infty} \leq c$. Zusätzlich ist $u^0_\alpha(x, \cdot\,)$ in β von oben halbstetig, monoton und erfüllt die gleichen Periodizitätseigenschaften wie u^ε.

Beweis. Sei $\{\beta_i\}_{i \in \boldsymbol{N}}$ eine in $\boldsymbol{R}$ dicht liegende Folge. Mit Hilfe eines Diagonalfolgen-Arguments besagt der Satz von Ascoli (basierend auf der Abschätzung $|u^\varepsilon_{x_\nu}| \leq c$ und der erwähnten Normierungseigenschaft der u^ε), dass für eine Nullfolge $\{\varepsilon_m\}_{m \in \boldsymbol{N}}$ die Funktionen $u^{\varepsilon_m}(\,\cdot\,, \beta_i)$ mit festem β_i kompakt-gleichmässig in x gegen ein $u(\,\cdot\,, \beta_i)$ konvergieren. Durch die Fortsetzung

$$u^0 = u^0_\alpha(x, \beta) \doteq \lim_{\beta_i \downarrow \beta} u(x, \beta_i), \quad \beta \in \boldsymbol{R},$$

ist eine von oben halbstetige, monotone Funktion mit der gewünschten Periodizität definiert. Da dieser Grenzübergang nach Dini komp.-glm. in x ist, ist $u^0(x, \cdot\,)$ höchstens auf einer abzählbaren, von x unabhängigen Menge $\Sigma_\alpha \subset \boldsymbol{R}$ unstetig.

Für $\beta_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \Sigma_\alpha$ gilt dann komp.-glm. $u^{\varepsilon_m}(\,\cdot\,, \beta_0) \to u^0(\,\cdot\,, \beta_0)$. Die gleiche Konvergenzeigenschaft lässt sich für $u^{\varepsilon_m}_x$ nachweisen. Man benützt die Abschätzung $|u^\varepsilon_{x_\nu x_\mu}| \leq c$ und wieder dan Satz von Ascoli. □

Bemerkung. Falls $u^0(x, \beta_0)$ stetig in β_0 ist, also $\beta_0 \in \boldsymbol{R} \setminus \Sigma_\alpha$, so ist auch $u^0_x(x, \beta_0)$ stetig in β_0.

Dies schliesst man aus der Abschätzung $|u^0_{x_\nu x_\mu}| \leq c$ durch Vertauschen des Grenzprozesses $u^0_x(x, \beta_i) \to u^0_x(x, \beta_0)$ für $\beta_i \to \beta_0$ mit der Ableitung von u^0 nach x.

Theorem 5.1 mit der nachfolgenden Bemerkung besagt, dass die Funktion $u^\varepsilon(x, \beta) = U^\varepsilon(x, \alpha x + \beta)$ Minimale des entsprechend transformierten regularisierten Variationsproblems ist, d.h. dass für jedes $\phi(x, \beta) \doteq \Phi(x, \alpha x + \beta)$ mit $\Phi \in W^{1,2}(T^{n+1})$ gilt

$$\int_{\bar{Q}} \left(\frac{\varepsilon}{2} (u^\varepsilon_\beta + \phi_\beta)^2 + F(x, u^\varepsilon + \phi, u^\varepsilon_x + \phi_x) \right) dx\, d\beta$$

$$\geq \int_{\bar{Q}} \left(\frac{\varepsilon}{2} (u^\varepsilon_\beta)^2 + F(x, u^\varepsilon, u^\varepsilon_x) \right) dx\, d\beta.$$

Mit den Abschätzungen $|u^{\varepsilon}_{x_\nu}| \leq c$, $\sqrt{\varepsilon}|u^{\varepsilon}_{\beta}| \leq c$ aus Lemma 5.2 folgt dann für die Grenzfunktion $u^0 = u^0_\alpha(x, \beta)$ leicht

Lemma 5.4. Sei $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$. Für $\phi(x, \beta) \doteq \Phi(x, \alpha x + \beta)$ mit beliebigem $\Phi \in W^{1,2}(T^{n+1})$ gilt

$$\int_{\bar{Q}} F(x, u^0 + \phi, u^0_x + \phi_x)\, dx\, d\beta \geq \int_{\bar{Q}} F(x, u^0, u^0_x)\, dx\, d\beta.$$

Die Funktion U^0_α, definiert durch $U^0_\alpha(x, \alpha x + \beta) \doteq u^0_\alpha(x, \beta)$, ist somit Minimale von (10).

Um zu zeigen, dass U^0_α und U^+_α übereinstimmen, weisen wir vorerst die Minimalität der Blätter $u(x) = U^0_\alpha(x, \alpha x + \beta_0)$ auf einem Periodizitätsbereich von u nach und sodann ihre Minimalität auf ganz $\boldsymbol{R}^n$.

Wie anhin soll Σ_α die abzählbare Menge der $\beta_i \in \boldsymbol{R}$ sein, für die $u^0_\alpha(x, \cdot)$ unstetig ist.

Lemma 5.5. Sei $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$, $\beta_0 \in \boldsymbol{R}\backslash\Sigma_\alpha$ und $E_\alpha \subset \boldsymbol{R}^n$ ein Fundamentalbereich von $\boldsymbol{R}^n/\Gamma_\alpha$ mit $\Gamma_\alpha = \{k \in \boldsymbol{Z}^n | \alpha k \in \boldsymbol{Z}\}$. Weiter setze man $u(x) \doteq u^0_\alpha(x, \beta_0)$.

Für alle $\phi \in W^{1,2}_{comp}(\boldsymbol{R}^n/\Gamma_\alpha)$ gilt dann

$$\int_{E_\alpha} (F(x, u + \phi, u_x + \phi_x) - F(x, u, u_x))\, dx \geq 0.$$

(wobei ϕ mit der entsprechenden Γ_α-periodischen Funktion auf $\boldsymbol{R}^n$ identifiziert wird.)

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ sei $\psi_\varepsilon : \boldsymbol{R} \to [0, 1]$ eine glatte Funktion mit supp $\psi_\varepsilon \subset (-\varepsilon - \varepsilon^2, \varepsilon + \varepsilon^2)$ und $\psi_\varepsilon \equiv 1$ auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Für $\phi \in W^{1,2}_{comp}(\boldsymbol{R}^n/\Gamma_\alpha)$ und genügend kleines $\varepsilon > 0$ kann $\phi_\varepsilon(x, \beta) \doteq \phi(x) \cdot \psi_\varepsilon(\beta)$ als Torusfunktion aufgefasst werden, d.h. $\phi_\varepsilon(x, \beta) = \Phi(x, \alpha x + \beta)$ für ein $\Phi \in W^{1,2}(T^{n+1})$.

Nach Lemma 5.4 gilt dann

$$\int_{\beta_0 - \varepsilon - \varepsilon^2}^{\beta_0 + \varepsilon + \varepsilon^2} I((u^0 + \phi_\varepsilon)(\,\cdot\,, \beta), E_\alpha)\, d\beta \geq \int_{\beta_0 - \varepsilon - \varepsilon^2}^{\beta_0 + \varepsilon + \varepsilon^2} I(u^0(\,\cdot\,, \beta), E_\alpha)\, d\beta.$$

Aufgrund der Stetigkeit von $u^0(x, \cdot)$ sowie $u^0_x(x, \cdot)$ in β_0 (obige Bemerkung) geht die Ungleichung für $\varepsilon \to 0$ über in

$$I((u^0 + \phi)(\,\cdot\,, \beta_0), E_\alpha) \geq I(u^0(\,\cdot\,, \beta_0), E_\alpha).$$

Die Integrale über die Intervalle $[\beta_0 - \varepsilon - \varepsilon^2, \beta_0 - \varepsilon]$ und $[\beta_0 + \varepsilon, \beta_0 + \varepsilon + \varepsilon^2]$, dividiert durch die Intervallänge $2(\varepsilon + \varepsilon^2)$ von $[\beta_0 - \varepsilon - \varepsilon^2, \beta_0 + \varepsilon + \varepsilon^2]$, streben hierbei wegen dem quadratischen Wachstum (iii) des Integranden F und wegen $u^0_x, \phi_x \in L^2$ tatsächlich gegen 0. □

Für rational unabhängiges α ist $\Gamma_\alpha = \{0\}$ und ϕ kann eine beliebige Funktion mit kompaktem Träger sein. Für solches α ist $u^0_\alpha(\,\cdot\,, \beta_0)$ somit minimal. Der folgende Satz zeigt nun, dass das auch für rational abhängiges

α gilt. Er verallgemeinert [Mo 1], Corollary 5.5, von Periodengruppen $\bar{\Gamma} \subset \boldsymbol{Z}^{n+1}$ mit $\operatorname{rg} \bar{\Gamma} = n$ auf Periodengruppen $\bar{\Gamma} \subset \boldsymbol{Z}^{n+1}$ mit $\operatorname{rg} \bar{\Gamma} \leq n$. Die neue Beweisidee besteht in einer "Zerlegung (mod $\boldsymbol{Z}^n$)" der vorgegebenen Variation $\psi \in W^{1,2}_{comp}(\boldsymbol{R}^n)$ in Variationen $\phi^j \in W^{1,2}_{comp}(\boldsymbol{R}^n/\Gamma)$.

Satz 5.6. Sei $\bar{\Gamma} \subset \boldsymbol{Z}^{n+1}$ eine Untergruppe mit injektiver Projektion auf die ersten n Koordinaten und $\Gamma \subset \boldsymbol{Z}^n$ das Bild dieser Projektion. Weiter sei $u \in W^{1,2}_{comp}(\boldsymbol{R}^n)$ periodisch mit $\bar{\Gamma}$, d.h. $T_{\bar{k}} u = u$ für alle $\bar{k} \in \bar{\Gamma}$.

Falls u minimal bzgl. Variationen $\phi \in W^{1,2}_{comp}(\boldsymbol{R}^n/\Gamma)$ ist, so ist u minimal (bzgl. beliebiger Variationen $\psi \in W^{1,2}_{comp}(\boldsymbol{R}^n)$).

Bermerkung. Auch die Umkehrung des Satzes ist richtig:

Falls u minimal (und periodisch mit $\bar{\Gamma}$) ist, so ist u minimal bzgl. Variationen $\psi \in W^{1,2}_{comp}(\boldsymbol{R}^n/\Gamma)$.

Dies beweist man etwa durch Gegenannahme, unter Verwendung des folgenden Hilfssatzes 5.7 sowie der Lemmas (6.8) und (6.9) in [Ba 1].

Der erste der folgenden beiden Hilfssätze drückt die Stetigkeit des Funktionals $I(u, \Omega) = \int_\Omega F(x, u, u_x)\, dx$ aus.

Hilfssatz 5.7. Sei $u \in W^{1,2}_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ und $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ beschränkt und messbar. Dann gilt für jede Nullfolge $\phi^j \in W^{1,2}_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$

$$\lim_{j \to \infty} I(u + \phi^j, \Omega) = I(u, \Omega)$$

Beweis von Hilfssatz 5.7. Wir zerlegen

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (F(x, u + \phi^j, u_x + \phi^j_x) - F(x, u, u_x))\, dx \\
&\quad = \int_\Omega (F(x, u + \phi^j, u_x + \phi^j_x) - F(x, u + \phi^j, u_x))\, dx \\
&\quad\quad + \int_\Omega (F(x, u + \phi^j, u_x) - F(x, u, u_x))\, dx
\end{aligned}$$

und zeigen, dass die beiden Integrale für $j \to \infty$ gegen Null konvergieren. Integrieren der Legendre-Bedingung (ii) liefert $|F_p(\bar{x}, p)| \leq c(|p| + 1)$. Wendet man auf das erste Integral den Mittelwertsatz in p an, so ergibt sich damit die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (F(x, u + \phi^j, u_x + \phi^j_x) - F(x, u + \phi^j, u_x))\, dx \\
&\quad \leq c \int_\Omega (|u_x| + |\phi^j_x| + 1)|\phi^j_x|\, dx.
\end{aligned}$$

Da nun nach Voraussetzung $\lim\|\phi^j\|_{L^2(\Omega)} = 0$ sowie $u_x, \phi^j_x \in L^2(\Omega)$ sind, konvergiert das Integral rechts nach Cauchy-Schwartz gegen 0.

Um das zweite Integral abzuschätzen, bemerken wir, dass nach [Ru], Theorem 3.12, eine Teilfolge ϕ^{j_i} existiert, o.E. $j = j_i$, mit $\lim_{j\to\infty} \phi^j(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$. Weil F stetig ist, ist ebenfalls $\lim_{j\to\infty}(F(x, u + \phi^j, u_x) - F(x, u, u_x)) = 0$ für alle $x \in \Omega\backslash A$ mit einer Ausnahmemenge A vom Mass 0. Aufgrund der Majorisierung $|F(x, u + \phi^j, u_x) - F(x, u, u_x)| \leq c(|u_x|^2 + 1)$ und $u_x \in L^2(\Omega)$ ist deshalb

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega\backslash A} (F(x, u + \phi^j, u_x) - F(x, u, u_x))\, dx = 0.$$

Das Integral strebt sogar für die gesamte ursprüngliche Folge $\{\phi^j\}$ gegen Null. Dies ersieht man durch Gegenannahme und erneute Anwendung des Existenztheorems aus [Ru]. □

Der zweite Hilfssatz verallgemeinert die Konstruktion, die aus drei Funktionen $\psi^1, \psi^2, \psi^3 \in C^1(\boldsymbol{R}^n)$ die Funktionen $\phi^1, \phi^2, \phi^3 \in C^0(\boldsymbol{R}^n)$ als Maximum, Mittlere und Minimum der gegebenen Funktionen ψ^1, ψ^2 und ψ^3 liefert. Die Vereinigung der Graphen der ϕ^j stimmt also mit jener der ψ^i samt Vielfachheiten überein.

Hilfssatz 5.8. Gegeben seien Funktionen $\psi^i \in C^1(\boldsymbol{R}^n)$ für $1 \leq i \leq i_0$. Es gibt eindeutig bestimmte, lokal Lipschitz-stetige Funktionen ϕ^j mit $\phi^1 \geq \phi^2 \geq \cdots \geq \phi^{i_0}$ und so, dass für jedes $x \in \boldsymbol{R}^n$ eine Bijektion v^x von $\{1 \leq j \leq i_0\}$ auf sich existiert mit $\phi^j(x) = \psi^{v^x(j)}(x)$. Für beliebiges $u \in W^{1,2}_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ sowie $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ beschränkt und messbar ist dann:

$$\sum_{i=0}^{i_0} I(u + \psi^i, \operatorname{supp} \psi^i \cap \Omega) = \sum_{j=0}^{i_0} I(u + \phi^j, \operatorname{supp} \phi^j \cap \Omega).$$

Beweis von Hilfssatz 5.8. Für jedes $x \in \boldsymbol{R}^n$ existiert eine Bijektion $v^x\colon \{1 \leq j \leq i_0\} \to \{1 \leq i \leq i_0\}$, so das $\psi^{v^x(1)}(x) \geq \psi^{v^x(2)}(x) \geq \cdots \geq \psi^{v^x(i_0)}(x)$. Wir definieren die Funktionen $\phi^1 \geq \phi^2 \geq \cdots \geq \phi^{i_0} \in C^0(\boldsymbol{R}^n)$ durch $\phi^j(x) \doteq \psi^{v^x(j)}(x)$ (vgl. Abb). Man überzeugt sich leicht, dass die ϕ^j auf jedem Kompaktum Lipschitz-stetig sind und deshalb fast überall differenzierbar sind sowie in $W^{1,2}_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ liegen.

Wir wollen für $u \in W^{1,2}_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$ und $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ beschränkt und messbar zeigen, dass

$$\sum_{i=0}^{i_0} I(u + \psi^i, \Omega) = \sum_{j=0}^{i_0} I(u + \phi^j, \Omega).$$

Da die Vereinigung der Graphen der ψ^i mit jener der ϕ^j inklusive Vielfachheiten übereinstimmt (genauer: für jedes $x \in \boldsymbol{R}^n$ die im Hilfssatz geforderte

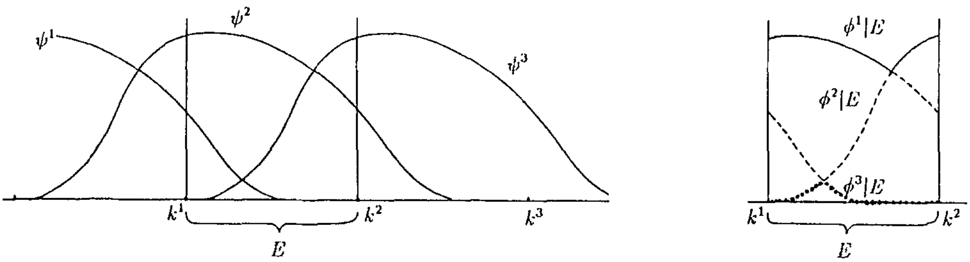

Abbildung
Konstruktion der Funktionen $\phi^1 \geq \phi^2 \geq \cdots \geq \phi^{i_0} \in C^0_{comp}(\boldsymbol{R}^n/\Gamma)$ aus den $\psi^i = \psi(x - k^i)$.

Bijektion v^x existiert), reicht es hierfür nachzuweisen, dass für fast alle $x \in \boldsymbol{R}^n$, für die $\psi^k(x)$ und $\phi^l(x)$ mit gewissen $1 \leq k, l \leq i_0$ gleich sind, auch die Ableitungen $\psi^k_x(x)$ und $\phi^l_x(x)$ übereinstimmen. Diese Ableitungen können aber nur dann verschieden sein (bzw. nicht existieren), wenn sich die Graphen der ursprünglichen Funktionen ψ^i im Punkte $(x, \psi^k(x)) = (x, \phi^l(x))$ transversal schneiden, und dies kann nur auf einer Menge vom Mass 0 geschehen.

Da schliesslich auch die Nullstellen der Funktionen ψ^i, $1 \leq i \leq i_0$, samt Multiplizitäten mit den Nullstellen der ϕ^j, $1 \leq j \leq i_0$, übereinstimmen, lässt sich der Integrationsbereich in den obigen beiden Summen auf $(\operatorname{supp} \psi^i \cap \Omega)$ bzw. $(\operatorname{supp} \phi^j \cap \Omega)$ einschränken. □

Mit diesen Vorbereitungen gelingt der

Beweis von Satz 5.6. Seien $\bar{\Gamma}$, Γ und u gegeben. Aufgrund von Hilfssatz 5.7 reicht es, die Behauptung für Variationen $\psi \in C^1_{comp}(\boldsymbol{R}^n)$ von u nachzuweisen. Alsdann lässt sich eine beliebige Variation $\bar{\psi} \in W^{1,2}_{comp}(\boldsymbol{R}^n)$ durch Funktionen $\psi \in C^1_{comp}(\boldsymbol{R}^n)$ in $W^{1,2}_{comp}$ approximieren.

Sei also $\psi \in C^1_{comp}(\boldsymbol{R}^n)$ beliebig. Für einen festen Fundamentalbereich E von $\boldsymbol{R}^n/\Gamma$ sei $\Lambda = \{k^1, \ldots, k^i_0\}$ die endliche Menge aller $k^i \in \Gamma$ mit $(\operatorname{supp} \psi + k^i) \cap E \neq \emptyset$. Weiter seien für $1 \leq i \leq i_0$ die Funktionen $\psi^i \in C^1_{comp}(\boldsymbol{R}^n)$ definiert durch $\psi^i(x) \doteq \psi(x - k^i)$ mit $k^i \in \Lambda$ (vgl. Abb).

Die erwähnte "Zerlegung (mod $\boldsymbol{Z}^n$)" der Variation ψ besteht nun in der Konstruktion der Funktionen ϕ^j aus den ψ^i gemäss Hilfssatz 5.8. Wegen der speziellen Definition der ψ^i und der Ordnungseigenschaft der entsprechenden ϕ^j lassen sich die Funktionen $\phi^j|_E$ als Elemente von $W^{1,2}_{comp}(\boldsymbol{R}^n/\Gamma)$ auffassen. Die vorausgesetzte Minimalität von u bzgl. solcher Variationen bedeutet $I(u + \phi^j, \operatorname{supp} \phi^j \cap E) \geq I(u, \operatorname{supp} \phi^j \cap E)$ für jedes $1 \leq j \leq i_0$. Gemäss Hilfssatz 5.8 ist somit

$$\sum_{i=1}^{i_0} I(u + \psi^i, \operatorname{supp} \psi^i \cap E) \geq \sum_{j=1}^{i_0} I(u, \operatorname{supp} \phi^j \cap E).$$

Aufgrund der Definition der ψ^i sowie der Γ-Periodizität von u und F entspricht die linke Summe gerade dem Integral $I(u + \psi, \operatorname{supp} \psi)$. Da andererseits $\bigcup_{1 \le j \le i_0} (\operatorname{supp} \phi^j \cap E)$ und $\bigcup_{1 \le i \le i_0} (\operatorname{supp} \psi^i \cap E)$ mit Vielfachheiten übereinstimmen, ist die rechte Summe identisch mit $\sum_{i=1}^{i_0} I(u, \operatorname{supp} \psi^i \cap E)$, was analog $I(u, \operatorname{supp} \psi)$ entspricht. Zusammen ergibt sich die gewünschte Ungleichung

$$I(u + \psi, \operatorname{supp} \psi) \ge I(u, \operatorname{supp} \psi). \qquad \square$$

Die anvisierte Übereinstimmung von $U_\alpha^0(x, \alpha x + \beta) = u_\alpha^0(x, \beta)$ mit $U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta)$ lässt sich nun folgendermassen ableiten:

Aufgrund der Periodizität von u_α^0 bzw. U_α^0 ist jedes einzelne Blatt $u(x) = U_\alpha^0(x, \alpha x + \beta_0)$ maximalperiodisch. Nach Lemma 5.5 sind mit $\beta_0 \in \boldsymbol{R} \backslash \Sigma_\alpha$ und $\bar{\Gamma} = \{\bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1} | \bar{\alpha}\bar{k} = 0\}$ die restlichen Voraussetzungen von Satz 5.6 erfüllt und u ist minimal. Da für diese β_0 die Funktion $U_\alpha(x, \alpha x + \beta_0)$ zusätzlich stetig in β_0 ist, ist $u(x) = U_\alpha^0(x, \alpha x + \beta_0)$ sogar rekurrent.

Andererseits ist die Menge der Häufungspunkte von $\{T_{\bar{k}} u | \bar{k} \in \boldsymbol{Z}^{n+1}\}$ für eine maximalperiodische Minimallösung u mit Rotationsvektor $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$, also die Menge $\mathcal{M}_\alpha^{rec}$, nach Theorem 3.1 eindeutig. Sie entspricht den Funktionen $U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta_0)$ für $\beta_0 \in \boldsymbol{R}$ bis auf die abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Σ_α. Wegen ihrer einheitlichen Normierung stimmen deshalb $U_\alpha^0(x, \alpha x + \beta)$ und $U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta)$ für $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ bis auf die Unstetigkeitsstellen in β überein.

Für die Nullfolge ε_m aus Lemma 5.3 konvergiert somit $U_\alpha^{\varepsilon_m}(x, \alpha x + \beta) = u_\alpha^{\varepsilon_m}(x, \beta)$ gegen die Konjugationsfunktion $U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta)$. Wie nun aus dem Beweis von Lemma 5.3 ersichtlich wird, lässt sich mit Ascoli von jeder Nullfolge eine Teilfolge ε_m auswählen, so dass u^{ε_m} gegen ein u^0 mit den dortigen Eigenschaften konvergiert. Zusammen mit der Eindeutigkeit von U_α^0 folgt, dass $U_\alpha^{\varepsilon_m}$ überhaupt für jede Nullfolge ε_m gegen U_α^0 bzw. U_α^+ konvergieren muss. Es gilt also

Theorem 5.9. Sei $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ Für alle ausser abzählbar vielen $\beta \in \boldsymbol{R}$ gilt in der C^1-Topologie

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} U_\alpha^\varepsilon(x, \alpha x + \beta) = U_\alpha^+(x, \alpha x + \beta).$$

U_α^+ ist für $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ insbesondere eine Minimallösung von (10).

Eine kleine Überlegung im nächsten Abschnitt wird zeigen, dass U_α^+ auch für $\alpha \in \boldsymbol{Q}^n$ Minimallösung von (10) ist.

5.2. *Grenzübergang für die minimale Wirkung*

Mit der Konvergenz der Blätterungen lässt sich leicht nachweisen, dass für die minimale Wirkung $M(\alpha)$ gilt $M(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to \infty} M^\varepsilon(\alpha)$. Wir tun dies wie bei den Funktionen $U_\alpha^{\varepsilon_m}$, U_α^0 und U_α^+ in zwei Schritten: Zuerst zeigen wir die Konvergenz von $M^{\varepsilon_m}(\alpha)$ gegen

$$M^0(\alpha) \doteq \int_{\bar{Q}} F(x, u_\alpha^0(x, \beta), (u_\alpha^0)_x(x, \beta))\, dx\, d\beta$$

und sodann, unabhängig vom ersten, die Übereinstimmung von $M^0(\alpha)$ mit $M(\alpha)$.

Lemma 5.10. Für alle $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ gilt $\lim_{\varepsilon \to \infty} M^\varepsilon(\alpha) = M^0(\alpha)$.

Beweis. $M^\varepsilon(\alpha)$ lässt sich mit der Funktion u_α^ε anstelle von U_α^ε schreiben als

$$M^\varepsilon(\alpha) = \int_{\bar{Q}} \left(\frac{\varepsilon}{2}(u_\alpha^\varepsilon)_\beta^2 + F(x, u_\alpha^\varepsilon, (u_\alpha^\varepsilon)_x)\right) dx\, d\beta.$$

Aufgrund des Satzes über die majorisierte Konvergenz und der Abschätzung $F(x, u^\varepsilon, u_x^\varepsilon) \leq \gamma^{-1}|u_x^\varepsilon|^2 + c_1$, $|u_x^\varepsilon| \leq c$, strebt $\int_{\bar{Q}} F(x, u^\varepsilon, u_x^\varepsilon)\, dx\, d\beta$ gegen $M^0(\alpha)$.

Wir zeigen aus den beiden Eigenschaften

$$\text{(a)}\ \ \varepsilon(u_\beta^\varepsilon)^2 \leq c \quad \text{und} \quad \text{(b)}\ \ u_\beta^\varepsilon > 0, \int_0^1 u_\beta^\varepsilon\, d\beta = 1,$$

dass für den übrig bleibenden Term mit beliebigem $x_0 \in Q$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \int_0^1 \varepsilon(u_\beta^\varepsilon(x_0, \beta))^2\, d\beta = 0.$$

Die zweite Aussage in (b) folgt aus $u^\varepsilon(x, \beta + 1) - u^\varepsilon(x, \beta) = 1$.

Für festes $x_0 \in Q$ sei $A^\varepsilon \subset I \doteq [0, 1]$ definiert durch $A^\varepsilon \doteq \{\beta \in I \mid (u_\beta^\varepsilon(x_0, \beta))^2 \geq \sqrt{c/\varepsilon}\}$. Aus (b) ergibt sich, dass $\mathscr{L}^1(A^\varepsilon) \leq \sqrt[4]{\varepsilon/c}$ sein muss. Mit (a) gilt deshalb die Abschätzung

$$\int_{A^\varepsilon} \varepsilon(u_\beta^\varepsilon(x_0, \beta))^2\, d\beta \leq \mathscr{L}^1(A^\varepsilon) \cdot \sup_{\beta \in A^\varepsilon} \varepsilon(u_\beta^\varepsilon(x_0, \beta))^2$$

$$\leq c \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{c}} \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Da $(u_\beta^\varepsilon(x_0, \beta))^2$ auf dem Komplement von A^ε durch $\sqrt{c/\varepsilon}$ beschränkt ist, gilt analog

$$\int_{I \setminus A^\varepsilon} \varepsilon(u_\beta^\varepsilon(x_0, \beta))^2\, d\beta \leq \sqrt{\frac{c}{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon c} \to 0.$$

Die beiden Abschätzungen liefern die Behauptung für festes $x_0 \in Q$.

Wegen der Unabhängigkeit der Abschätzungen von x_0 und dem Satz von Fubini konvergiert ebenso $\int_{\bar{Q}} (\varepsilon/2)(u_\beta^\varepsilon)^2 \, dx \, d\beta$ gegen 0. □

Und nun die Übereinstimmung von $M^0(\alpha)$ und $M(\alpha)$: Für $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ folgt diese mit Satz 4.2 direkt aus Theorem 5.9.

Für $\alpha \in \boldsymbol{Q}^n$ führt mit $u^0(\cdot, \beta)$ anstelle von $u^+(\cdot, \beta)$ wörtlich der Beweis von Satz 4.2, Teil b), auf $M(\alpha) = M^0(\alpha)$. Wesentlich ist dabei die Tatsache, dass $u^0(\cdot, \beta) \in \mathscr{M}_\alpha^{per}$ für $\beta \in \boldsymbol{R} \backslash \Sigma_\alpha$

Zusammen mit Lemma 5.10 gilt somit.

Theorem 5.11. Für alle $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ gilt $\lim_{\varepsilon \to \infty} M^\varepsilon(\alpha) = M(\alpha)$.

$M^\varepsilon(\alpha)$ und $M(\alpha)$ sind nach [Mo 2] bzw. [Sn] strikt konvex in α. Insbesondere sind die Funktionen stetig und die Konvergenz ist für $\varepsilon \to 0$ kompakt-gleichmässig.

Da $M^0(\alpha)$ nach Lemma 5.4 das Minimum des degenerierten Variationsproblems (10) darstellt, folgt mit der Äquivalenz $M(\alpha) = M^0(\alpha)$, dass U_α^+ nun auch für $\alpha \in \boldsymbol{Q}^n$ eine Minimallösung von (10) ist.

Wir haben damit aber nicht die Eindeutigkeit der minimalen Lösung des degenerierten Variationsproblems nachgewiesen. Für $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \backslash \boldsymbol{Q}^n$ ist eine Minimallösung von (10) nur insofern eindeutig, als sie Grenzfunktion der Minimalen des regularisierten Problems (11) ist.

Dank

Die Resultate sind Teil meiner Lizentiatsarbeit an der Universität Bern unter der Leitung von Prof. V. Bangert. Ihm danke ich herzlich für seine vielseitige Unterstützung.

Literatur

[Ba 1] Bangert, V., *A uniqueness theorem for $\boldsymbol{Z}^n$-periodic variational problems.* Comment. Math. Helv. *62*, 511–531 (1987).

[Ba 2] Bangert, V., *On minimal laminations of the torus.* Ann. Inst. Henri Poincaré (Analyse non linéaire) *6*, 95–138 (1987).

[Dz] Denzler, J., *Mather sets for plane Hamiltonian systems.* J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) *38*, 791–812 (1987).

[Ma] Mather, J., *Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus.* Topology *21*, 457–467 (1982).

[Mo 1] Moser, J., *Minimal solutions of variational problems on a torus.* Ann. Inst. Henri Poincaré (Analyse non linéaire) *3*, 229–272 (1986).

[Mo 2] Moser, J., *Minimal Foliation on a Torus.* In: *Topics in Calculus of Variations* (Montecantini Terme 1987), ed. M. Giaquinta, Springer Lect. Notes in Math. *1365*, 62–99 (1989).

[Ru] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York 1966.

[Sn] Senn, W., *Strikte Konvexität für Variationsprobleme auf dem n-dimensionalen Torus.* Eingereicht bei *Manuscripta mathematica.*
[We] Weyl, H., *Über die Gleichverteilung mod. Eins.* Math. Ann. *77,* 313–352 (1916).

Abstract

We consider regular and Cantor-like minimal foliations of the $(n+1)$-dimensional Torus T^{n+1} whose leaves minimize a given variational integral. Each leaf of such a generalized foliation lies in the universal covering $\boldsymbol{R}^{n+1}$ within a finite distance to the affine leaves $(z, \alpha x + \beta)$ of fixed $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$. We show that the conjugation-function $U_\alpha(x, \theta)$, mapping the affine leaves $(x, \alpha x + \beta)$ into the leaves $(x, U_\alpha(x, \alpha x + \beta))$ of the generalized foliation, is itself a minimal solution of an extended degenerate variational problem on T^{n+1}. If $\alpha \in \boldsymbol{R}^n \setminus \boldsymbol{Q}^n$ the function U_α is characterized in a unique way as (discontinuous) limit of the minimal solutions of the corresponding regularized problem.

(Eingegangen: 21 Januar 1991)